

Série d'exercices — Chapitre 10

Vecteurs de l'espace

1^{re} année Bac Sciences Expérimentales · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Exercice 1 — Calcul vectoriel — prisme

★★★★★

$ABCDEF$ est un prisme droit à bases triangulaires ABC et DEF (D, E, F situés respectivement au-dessus de A, B, C). I est le milieu de $[DF]$.

1) Exprimer $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

2) Soit G le point tel que $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$. Montrer que I est le milieu de $[AG]$.

► Afficher / Masquer la solution

On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AC} = \vec{v}, \overrightarrow{AD} = \vec{w}$. Alors $\overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}, \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \vec{u} + \vec{w}$ (car $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AD} = \vec{w}$ dans le prisme), $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC} = \vec{v}$, et I milieu de $[DF]$ donne $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DF} = \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

1) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{v} + \vec{w}$.

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} = (\vec{u} + \vec{w}) + (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{v} + \vec{w}$.

2) $\overrightarrow{AG} = 2\vec{w} + \vec{v}$, donc le milieu M de $[AG]$ vérifie $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{v} = \overrightarrow{AI}$. Ainsi $M = I$.

Exercice 2 — Coplanarité — parallélépipède

★★★★★

$ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle. I est le milieu de $[BF]$.

1) Les vecteurs $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DG}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont-ils coplanaires? Justifier.

2) Les vecteurs $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont-ils coplanaires? Justifier.

► Afficher / Masquer la solution

On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AD} = \vec{v}, \overrightarrow{AE} = \vec{w}$.

1) $\overrightarrow{CA} = -\vec{u} - \vec{v}, \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) - \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}, \overrightarrow{DH} = \vec{w}$.

Supposons $\overrightarrow{DG} = a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{DH} : \vec{u} + \vec{w} = a(-\vec{u} - \vec{v}) + b\vec{w}$. Par indépendance de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$: coefficient de $\vec{v}$ donne $-a = 0$ donc $a = 0$, puis $\vec{u} = 0$: contradiction. **Les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.**

2) I milieu de $[BF] : \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$ (car $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$).

Donc $\overrightarrow{AI} = 1 \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} : \text{oui, coplanaires.}$

Exercice 3 — Milieux — cube

★★★★★

Soit $ABCDEFGH$ un cube. Soient I le milieu de $[AE]$ et J le milieu de $[CG]$.

1) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC}$.

2) En déduire que $(IJ) \parallel (AC)$ et $IJ = AC$.

3) Soit Ω le centre du cube (milieu de $[AG]$). Montrer que Ω est le milieu de $[IJ]$.

► Afficher / Masquer la solution

1) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI}$. Or I milieu de $[AE] \implies \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

J milieu de $[CG] \implies \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ (car $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}$).

Donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$.

2) Immédiat d'après 1).

3) Le centre Ω vérifie $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE})$.

Le milieu M de $[IJ] : \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AO}$. Donc $M = \Omega$.

Exercice 4 — Relation vectorielle — cube

★★★★★

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le milieu de $[HF]$. Le point M vérifie $2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MA}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ et que $M \in [AI]$.

2) Soient J et K les milieux respectifs de $[EF]$ et $[BC]$. Montrer que $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FC}$.

► Afficher / Masquer la solution

1) $2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM}$. Or $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AI}$, donc

$$2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AI}) = -\overrightarrow{AM} \implies 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AI} \implies \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.$$

Ainsi M est sur la droite (AI) et situé entre A et I .

2) J milieu de $[EF]$ et K milieu de $[BC]$. On a $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$ (car $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$).

Le milieu J vérifie $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; le milieu K vérifie $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Alors $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$.

Or $\frac{1}{2}\overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$. D'où l'égalité.

Exercice 5 — Parallélisme droite-plan

★★★★★

Soit $ABCDEFGH$ un cube. I , J et O sont les milieux respectifs de $[AE]$, $[GH]$ et $[CH]$.

1) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AO}$.

2) En déduire que $(IJ) \parallel (AHC)$.

► Afficher / Masquer la solution

1) Avec la base $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\vec{w}$, $G = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $H = \vec{v} + \vec{w}$, $J = \frac{1}{2}(G + H) = \vec{u}/2 + \vec{v} + \vec{w}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$, $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$.

O milieu de $[CH]$: $C = \vec{u} + \vec{v}$, $H = \vec{v} + \vec{w}$, $O = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, donc $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{IJ}$.

2) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$ (car O milieu de $[CH]$ et $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH})$). Donc $\overrightarrow{IJ}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$, vecteurs directeurs de (AHC) : $(IJ) \parallel (AHC)$.

Exercice 6 — Définition vectorielle

★★★★★

Soit $ABCDEFGH$ un cube.

1) Déterminer le plan $\mathcal{P}(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$.

2) Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AE}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

3) Caractériser la droite $\mathcal{D}(E; \overrightarrow{AB})$.

► Afficher / Masquer la solution

1) $\mathcal{P}(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$ est le plan (ABD) , c'est-à-dire le plan de la face inférieure (ABC) (ou (ABD)).

2) C'est le plan $\mathcal{P}(A; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE}) = (ACE)$, plan diagonal passant par A , C , E .

3) $\mathcal{D}(E; \overrightarrow{AB})$ est la droite passant par E et parallèle à (AB) , c'est-à-dire la droite (EF) (car $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$).

Exercice 7 — Coplanarité — cube

★★★★★

$ABCDEFGH$ est un cube. Soient I le milieu de $[BE]$ et J le milieu de $[GC]$.

- 1) Faire une figure.
- 2) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$.
- 3) En déduire que $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont coplanaires.

► Afficher / Masquer la solution

- 1) Figure : cube avec I milieu de $[BE]$ et J milieu de $[GC]$.
- 2) En base $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$: $I = \frac{1}{2}(B + E) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{w}$, $J = \frac{1}{2}(G + C) = \vec{u} + \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, d'où $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$.
Or $\overrightarrow{EG} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{FG} = \vec{v}$, donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$.
- 3) Immédiat d'après 2).

Exercice 8 — Tétraèdre — coplanarité

★★★★★

On considère un tétraèdre $ABCD$. Les points I, J, K, L sont définis par :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}.$$

- 1) Faire une figure.
- 2) Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.
- 3) En déduire que I, J, K, L sont coplanaires.
- 4) Montrer que (BD) est parallèle au plan $(IJKL)$.

► Afficher / Masquer la solution

- 1) Figure du tétraèdre avec les quatre milieux (milieux des arêtes AB, BC, CD, DA).
- 2) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = (\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
 $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AK}$. Or $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DL} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, et $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
Donc $\overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{IJ}$.
- 3) $\overrightarrow{KL} = -\overrightarrow{IJ}$, donc $(IJ) \parallel (KL)$ et $IJ = KL$: $IJKL$ est un parallélogramme (ou un aplati), donc les quatre points sont coplanaires.
- 4) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. De plus $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.
Donc $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IL}$, et $\overrightarrow{IL}$ est un vecteur du plan $(IJKL)$: $(BD) \parallel (IJKL)$.

Exercice 9 — Tétraèdre — intersection

★★★★★

On considère un tétraèdre $ABCD$. Les points E, F, G sont définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD}.$$

- 1) Justifier que $E \in (ABC)$.
- 2) Montrer que les points F, C, D sont alignés.
- 3) Exprimer $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{CF}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$, puis montrer que $G \in (FC)$.

► Afficher / Masquer la solution

- 1) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc $E \in (ABC)$.
- 2) $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$. Alors $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{CD}$.
 $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$.
Donc $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{DF}$: $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires, F, C, D sont alignés.
- 3) $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$, et $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{CD}$, donc $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$: $G \in (FC)$.

Exercice 10 — Pyramide — parallélisme

$PABCD$ est une pyramide de sommet P dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. On considère les points M et N tels que

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BP}, \quad \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CP}.$$

1) Montrer que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires.

2) En déduire que $(MN) \parallel (PAD)$.

3) Montrer que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

► Afficher / Masquer la solution

1) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM}$. Or $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BP}$ et $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CP}$.

Comme $ABCD$ est un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. De plus M et N sont les milieux de $[BP]$ et $[CP]$, donc (MN) est la droite des milieux dans le triangle BPC : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

2) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD}$ dirige une droite du plan (PAD) : $(MN) \parallel (PAD)$.

3) D'après 1), $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.