

Cours — Chapitre 07

Limite d’une fonction

1^{re} année Bac Sciences Expérimentales · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Limites usuelles — II. Opérations sur les limites — III. Limites des polynômes et des fonctions rationnelles — IV. Limites des fonctions trigonométriques — V. Limites et ordre — VI. Lecture graphique des limites.

Durée indicative : 11 heures. **Prérequis :** généralités sur les fonctions numériques, calcul numérique, ordre dans $\mathbb{R}$, trigonométrie.

I. Limites usuelles

Activité 1

On considère les fonctions $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$.

1) Calculer x^2 , x^3 , $\sqrt{x}$ et $\frac{1}{x}$ pour $x \in \{4; 25; 100; 10^4; 10^6\}$.

2) Que deviennent x^2 , x^3 et $\sqrt{x}$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes ? Et $\frac{1}{x}$?

► Afficher / Masquer la solution

Activité 2

1) Calculer $\frac{1}{x}$ pour $x \in \{-0,1; -0,01; -0,001\}$ puis pour $x \in \{0,001; 0,01; 0,1\}$.

2) Que devient $\frac{1}{x}$ lorsque x se rapproche de 0 en restant positif? en restant négatif?

► Afficher / Masquer la solution

Propriété 1 (limites usuelles, admises)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

En $+\infty$	En $-\infty$	En 0
$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ +\infty}} x^n =$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair	$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$
$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ 0}} \frac{1}{x^n} =$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ +\infty}} \sqrt[n]{x} =$		$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$ si n est pair, $-\infty$ si n est impair
$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ 0}} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} =$		$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = +\infty$

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ n'est définie que sur $[0; +\infty[$: elle n'a pas de limite en $-\infty$, ni à gauche en 0.

Exemple 1

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} x^6; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^6; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4}; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^4}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5}; \\ &\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^5}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^5}; \lim_{x \rightarrow 0} x^3; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4}; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 \times \frac{1}{x^3}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x}}; \\ &\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}. \end{aligned}$$

► Afficher / Masquer la solution

Propriété 2

Soit f une fonction définie à droite et à gauche de a , et ℓ un réel (ou $\pm\infty$).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell \text{ et } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell.$$

En particulier, si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, alors f n'admet pas de limite en a .

Exemple 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$ si $x > 4$ et $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x}$ si $x < 4$ (avec $x \neq 0$).

- 1) Calculer $f(16)$, $f(9)$, $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$.
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$.
- 3) La fonction f admet-elle une limite en 4 ?
- 4) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$. Conclure.

► Afficher / Masquer la solution

Remarque

Pour parler de la limite de f en a (resp. à droite, à gauche de a , en $+\infty$, en $-\infty$), f doit être définie **au voisinage** de a : sur un ensemble de la forme $]a - r ; a[\cup]a ; a + r[$ (resp. $]a ; a + r[$, $]a - r ; a[$, $]A ; +\infty[$, $] - \infty ; A[$) inclus dans D_f , avec $r > 0$.

II. Opérations sur les limites

Propriété 3 (admise)

Dans les tableaux, ℓ et ℓ' sont des réels ; « F.I. » signifie **forme indéterminée** : on ne peut pas conclure directement.

$\lim f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f + g)$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

$\lim f$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim(f \times g)$	$\ell\ell'$	$\pm\infty$	$\mp\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	$\pm\infty$	0
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	F.I.

(Si $\lim f = \ell < 0$ ou $-\infty$, les signes des deux colonnes 0^+ et 0^- sont échangés.) Enfin, si $\lim f = +\infty$ alors $\lim \sqrt[n]{f} = +\infty$; et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim f = \pm\infty \Rightarrow \lim f^n = +\infty$ si n est pair, et $\lim f^n = \lim f$ si n est impair.

Remarque

Il y a quatre formes indéterminées : « $+\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ ». Pour **lever** une indétermination, on transforme l’écriture : factorisation (identités remarquables, racines d’un trinôme, division euclidienne), multiplication par l’expression conjuguée, mise en facteur du terme dominant, changement de variable, encadrement (propriétés 4, 5 et 6).

Exemple 3

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 5); \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + x^2 \right); \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x - 7); \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + 1 \right); \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x)^3(-x^2 + 4);$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x + 1}{x^2 - 5}; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 - x}{x^2}; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-4}{x^3}; \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5}{-x + 2}; \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{6}{3 - x}; \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{1}{x^2 + 4x + 3}; \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + 3}{x^2 - 4}.$$

► [Afficher / Masquer la solution](#)**Méthode — Rappels utiles**

- **Signe d'un trinôme** $ax^2 + bx + c$ de discriminant $\Delta > 0$ et de racines $x_1 < x_2$: il est du signe de a à l'extérieur de $[x_1; x_2]$ et du signe de $-a$ entre les racines.
- **Factorisation** : si x_1 et x_2 sont les racines, $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- **Division euclidienne** : si P est un polynôme de degré $n \geq 1$ et $P(\alpha) = 0$, alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$; Q s'obtient en divisant $P(x)$ par $x - \alpha$.
- **Identités** : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$; $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.
- **Expressions conjuguées** ($a, b \geq 0$) : $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$; $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b) = a - b^2$.

Exemple 4

Calculer les limites suivantes (formes indéterminées) :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2}; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - x - 2}; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - x^2 - x - 2}; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{4 - 2x}; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \sqrt{x} - 3x);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x}).$$

► Afficher / Masquer la solution

Exemple 5

Calculer, à l'aide des expressions conjuguées :

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}; \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x - 3} - 3}{x - 4}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + x} - \sqrt{9 - x}}{x}; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x + 3}}{1 - \sqrt{2x - 1}}.$$

► Afficher / Masquer la solution

Remarque

- Si f admet une limite en a , cette limite est **unique**. On dit que la limite est **finie** si c'est un réel, **infinie** si c'est $+\infty$ ou $-\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - \ell) = 0$.
- Si $\lim f = \ell$, alors $\lim \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$ (si $\ell \neq 0$), $\lim \sqrt{f} = \sqrt{\ell}$ (si $\ell \geq 0$ et $f \geq 0$), $\lim \alpha f = \alpha \ell$; et pour une constante c , $\lim c = c$.
- Si f est paire, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; si f est impaire, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

III. Limites des polynômes et des fonctions rationnelles

Propriété 4

Soient P et Q deux polynômes et a un réel tel que $Q(a) \neq 0$.

- $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}$.
- En $+\infty$ et en $-\infty$, un polynôme a la même limite que son **terme de plus haut degré**, et une fonction rationnelle a la même limite que le **quotient des termes de plus haut degré** : si ax^n et bx^m sont ces termes, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$.

Exemple 6

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 5x^4 + 2x - 1); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2 + 4x + 7); \quad \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 - x + 3); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - x + 1}{x^3 - 4x^6 + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 3x + 1}{2x^2 + x - 4}.$$

► Afficher / Masquer la solution

Remarque

Lorsque la limite de $\sqrt{ax^2 + bx + c} + (\alpha x + \beta)$ en $\pm\infty$ est une forme indéterminée :

- si $\sqrt{a} = |\alpha|$, on multiplie et on divise par l'expression conjuguée, puis on met x en facteur ;
- si $\sqrt{a} \neq |\alpha|$, on met x^2 en facteur sous la racine, en utilisant $\sqrt{x^2} = |x|$ (donc $\sqrt{x^2} = x$ si $x > 0$ et $\sqrt{x^2} = -x$ si $x < 0$).

Exemple 7

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} - 2x + 3); \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 2} + 2x + 1).$$

► Afficher / Masquer la solution

IV. Limites des fonctions trigonométriques

Propriété 5 (admise)

- Pour tout réel a : $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ et $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$.
- Pour tout réel $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) : $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$.
- **Limites usuelles** : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
- Plus généralement, pour $a \neq 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{ax} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$.

Exemple 8

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \cos x ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{3x} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x^2} ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\tan(x-2)}{x-2} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{2}{x}\right) ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{x} ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \tan x ;$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan x.$$

► [Afficher / Masquer la solution](#)

V. Limites et ordre**Propriété 6 (admise)**

Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de a (a réel, $+\infty$ ou $-\infty$) et ℓ un réel.

- Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ au voisinage de a et $\lim g = \lim h = \ell$, alors $\lim f = \ell$.
- Si $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ au voisinage de a et $\lim g = 0$, alors $\lim f = \ell$.
- Si $f(x) \geq g(x)$ au voisinage de a et $\lim g = +\infty$, alors $\lim f = +\infty$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a et $\lim g = -\infty$, alors $\lim f = -\infty$.

Méthode — Rappel

Pour tout réel X : $-1 \leq \cos X \leq 1$, $-1 \leq \sin X \leq 1$, $|\cos X| \leq 1$ et $|\sin X| \leq 1$.

Exemple 9

Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2 \cos x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

► Afficher / Masquer la solution

Remarque

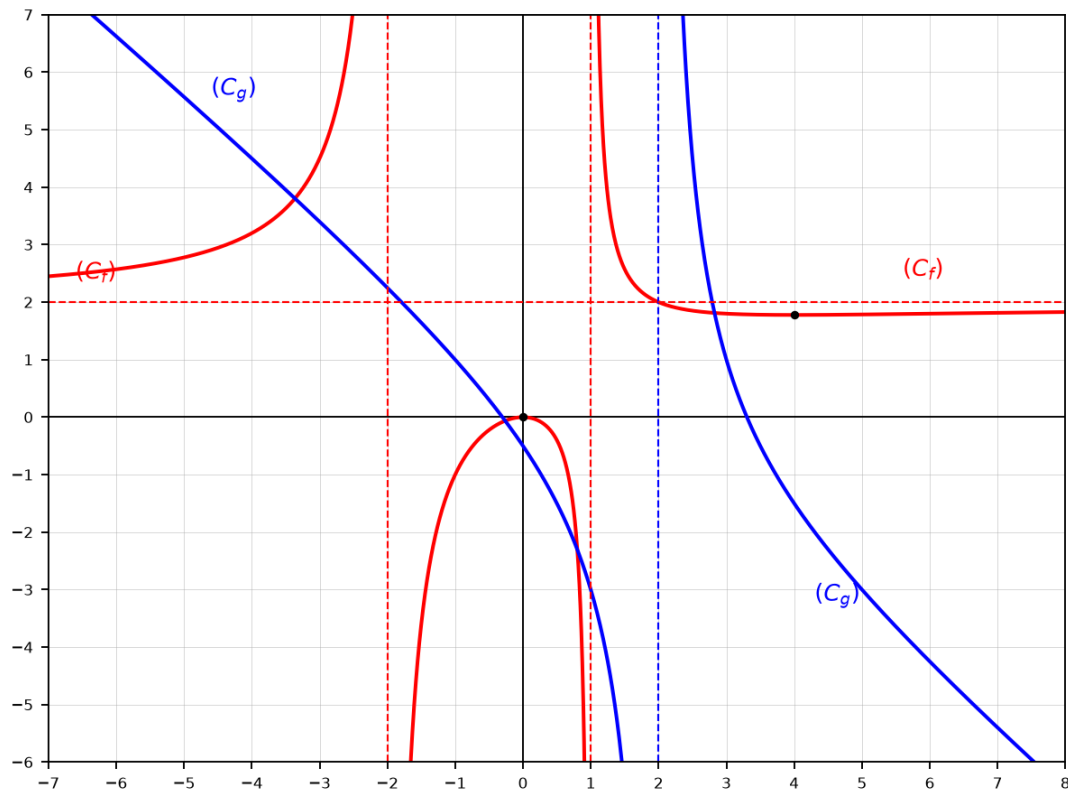
Les fonctions $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \tan x$ n'ont pas de limite en $+\infty$ ni en $-\infty$: elles prennent indéfiniment toutes leurs valeurs, sans se rapprocher d'un nombre.

VI. Lecture graphique des limites

Exemple 10

Dans le repère ci-dessous, (C_f) et (C_g) sont les courbes de deux fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$ et sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Les droites en pointillés sont des asymptotes.

- 1) Déterminer graphiquement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.
- 2) Dresser le tableau de variations de f en y ajoutant ces limites. (On donne $f(0) = 0$ et $f(4) = \frac{16}{9}$.)
- 3) Déterminer graphiquement $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$.
- 4) Dresser le tableau de variations de g .



► Afficher / Masquer la solution