

Cours — Chapitre 08

Fonctions exponentielles

2BAC PC SVT · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. La fonction exponentielle népérienne — II. Propriétés algébriques — III. Équations et inéquations — IV. Limites et courbe — V. Dérivée de e^u et primitives de $u'e^u$ — VI. Fonction exponentielle de base a — Résumé.

I. La fonction exponentielle népérienne

1. Définition

Définition 1 — fonction exponentielle

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$, et $\ln(]0; +\infty[) = \mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque, définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]0; +\infty[$: on l'appelle **fonction exponentielle népérienne** et on la note $\exp$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in]0; +\infty[$: $\exp(x) = y \iff x = \ln y$.

Propriété 1 — notation e^x

Pour tout rationnel r : $\ln(e^r) = r \ln e = r$, donc $\exp(r) = e^r$. On prolonge cette écriture à tout réel x en posant $e^x = \exp(x)$.

2. Premières propriétés

Propriété 2

- La fonction $x \mapsto e^x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $e^0 = 1$, $e^1 = e$; pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\ln(e^x) = x$; pour tout $x \in]0; +\infty[$: $e^{\ln x} = x$.
- Pour tous réels a et b : $e^a = e^b \iff a = b$ et $e^a < e^b \iff a < b$.

Exemple 1

Simplifier $e^{\ln 5}$ et $\ln(e^{-3})$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x-1} > 1$.
[► Afficher / Masquer la solution](#)

II. Propriétés algébriques

Propriété 3

Pour tous réels x et y et tout rationnel r :

$$e^{x+y} = e^x e^y ; \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} ; \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} ; \quad (e^x)^r = e^{rx}.$$

Remarque

Ces règles se démontrent en appliquant $\ln$: par exemple $\ln(e^x e^y) = \ln e^x + \ln e^y = x + y = \ln(e^{x+y})$, puis on utilise l'injectivité de $\ln$.

Application 1

Simplifier $A = \frac{e^{3x+1}}{e^{x-1}}$ et $B = (e^x)^2 \times e^{-2x+3}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

III. Équations et inéquations**Méthode — résoudre une équation ou une inéquation avec e^x**

1. Se ramener à $e^A = e^B$ ou $e^A < e^B$ (et utiliser $A = B$ ou $A < B$), ou à $e^A = k$ avec $k > 0$ (alors $A = \ln k$); si $k \leq 0$, l'équation $e^A = k$ n'a pas de solution.
2. Pour une expression en e^{2x} et e^x : on pose $X = e^x$ (avec $X > 0$) et on résout une équation du second degré.

Application 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(E) : e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$ et $(I) : e^{2x} - e^x - 2 > 0$.

► Afficher / Masquer la solution

Application 3 — système

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} e^x + 2e^y = 5 \\ 3e^x - e^y = 1 \end{cases}$.

► Afficher / Masquer la solution

IV. Limites et courbe**Propriété 4 — limites de référence**

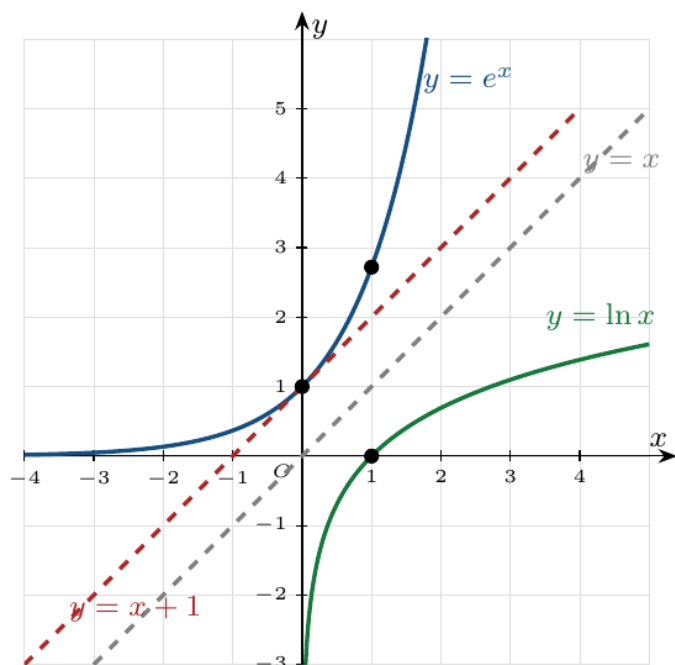
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0.$$

Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

Remarque — interprétation graphique

- La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à (C_{exp}) au voisinage de $-\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$: (C_{exp}) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.
- (C_{exp}) et (C_{ln}) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. La tangente à (C_{exp}) au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$, et $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x .

**Exemple 2**

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$.

► [Afficher / Masquer la solution](#)

Application 4

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - x}{e^{2x} + 1}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x) e^x$.

► Afficher / Masquer la solution

V. Dérivée de e^u et primitives de $u'e^u$ **Propriété 5**

- La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(e^x)' = e^x$.
- Si u est dérivable sur un intervalle I , alors $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $(e^u)' = u'e^u$.
- Par conséquent, les primitives de $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto e^{u(x)} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 3

Calculer $(e^{x^2-3x})'$ et $(xe^{-x})'$. Déterminer une primitive de $x \mapsto e^{2x}$, de $x \mapsto xe^{x^2}$ et de $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

Application 5 — étude de fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)e^x$. Étudier ses variations et ses limites.

► Afficher / Masquer la solution

VI. Fonction exponentielle de base a **Définition 2**

Soit a un réel strictement positif. Pour tout réel x , on pose $a^x = e^{x \ln a}$. La fonction $x \mapsto a^x$ est la **fonction exponentielle de base a** ; c'est la réciproque de $\log_a$ lorsque $a \neq 1$.

Propriété 6

- Pour tous réels x, y : $a^{x+y} = a^x a^y$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $(ab)^x = a^x b^x$, et $\ln(a^x) = x \ln a$.
- $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(a^x)' = (\ln a) a^x$.
- Si $a > 1$: strictement croissante, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$. Si $0 < a < 1$: strictement décroissante, $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

Application 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2^{x+1} = 24$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9$. Calculer la dérivée de $g : x \mapsto 5^{x^2}$.

► Afficher / Masquer la solution

Résumé**À retenir**

Notion	À retenir
Définition	$e^x = y \iff x = \ln y \ (x \in \mathbb{R}, y > 0)$; $e^x > 0$
Algèbre	$e^{x+y} = e^x e^y$, $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$, $(e^x)^r = e^{rx}$
Limites	$e^x \xrightarrow{-\infty} 0$; $\frac{e^x}{x^n} \xrightarrow{+\infty} +\infty$; $x^n e^x \xrightarrow{-\infty} 0$; $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{0} 1$
Dérivée, primitive	$(e^u)' = u' e^u$; primitives de $u' e^u$: $e^u + C$
Base a	$a^x = e^{x \ln a}$; $(a^x)' = (\ln a) a^x$