

Cours — Chapitre 09

Équations différentielles

2BAC PC SVT · Lycée Qualifiant Ibn Hazm · Prof. El Koudri Hamza · 2026–2027

Plan du chapitre. I. Équations différentielles du premier ordre ($y' = ay$, $y' = ay + b$) — II. Équations du second ordre $y'' + ay' + by = 0$ — III. Exemples de modélisation — Résumé.

Dans tout le chapitre, y désigne une fonction inconnue de la variable réelle x , deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ lorsque y'' intervient ; a et b désignent des nombres réels.

I. L'équation différentielle $y' = ay + b$

1. Vocabulaire

Définition 1

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction y et qui fait intervenir ses dérivées y' , y'' ... **Résoudre** une équation différentielle sur un intervalle I , c'est déterminer toutes les fonctions dérivables sur I qui la vérifient : ce sont ses **solutions**.

Exemple 1

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x}$ vérifie $f'(x) = 3e^{3x} = 3f(x)$: c'est une solution de l'équation $y' = 3y$.

2. L'équation $y' = ay$

Propriété 1

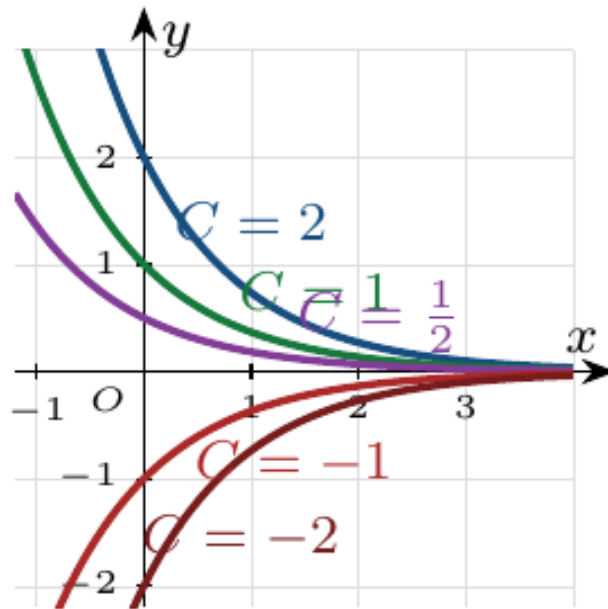
On considère un réel a . Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions
$$x \mapsto Ce^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque

Démonstration. Les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$ sont solutions : leur dérivée est aCe^{ax} . Réciproquement, si y est une solution, la fonction z définie par $z(x) = y(x)e^{-ax}$ vérifie $z'(x) = (y'(x) - ay(x))e^{-ax} = 0$; elle est donc constante, égale à un réel C , et $y(x) = Ce^{ax}$.

Remarque

Si $a = 0$, l'équation $y' = 0$ a pour solutions les fonctions constantes ; la formule reste valable.



3. L'équation $y' = ay + b$ avec $a \neq 0$

Propriété 2

On considère deux réels $a \neq 0$ et b . Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions

$$x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Remarque

La fonction constante $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est la **solution constante** (ou particulière) de l'équation ; la solution générale est la somme de cette solution constante et de la solution générale de $y' = ay$.

4. Solution vérifiant une condition initiale

Propriété 3

On considère des réels $a \neq 0$, b , x_0 et y_0 . L'équation $y' = ay + b$ admet une **unique** solution f vérifiant $f(x_0) = y_0$.

Exemple 2

Résoudre l'équation $(E) : 2y' + 6y = 3$, puis déterminer la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 2$.

► [Afficher / Masquer la solution](#)

Application 1

On considère l'équation $(E) : y' - \frac{1}{2}y = 1$. Déterminer la solution f de (E) dont la courbe passe par le point $A(2; 0)$.

► [Afficher / Masquer la solution](#)

II. L'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$

1. Équation caractéristique

Définition 2

On considère deux réels a et b . L'**équation caractéristique** de l'équation différentielle $(E) : y'' + ay' + by = 0$ est l'équation du second degré, d'inconnue r :

$$r^2 + ar + b = 0.$$

On note $\Delta = a^2 - 4b$ son discriminant.

Remarque

Pour un réel r , la fonction $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (E) si et seulement si $(r^2 + ar + b)e^{rx} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique : c'est l'origine de cette équation.

2. Résolution

Théorème 1

On considère l'équation $(E) : y'' + ay' + by = 0$ et son équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ de discriminant Δ .

— Si $\Delta > 0$: l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , et les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}, \quad (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

— Si $\Delta = 0$: l'équation caractéristique a une racine double r , et les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto (\alpha x + \beta)e^{rx}, \quad (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

— Si $\Delta < 0$: l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $p + iq$ et $p - iq$ ($q \neq 0$), et les solutions de (E) sont les fonctions

$$x \mapsto e^{px}(\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)), \quad (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

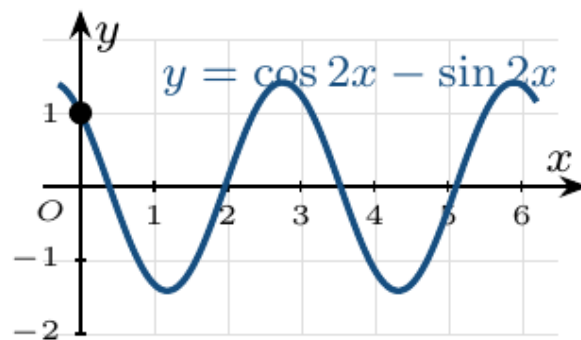
Exemple 3

Résoudre les équations $(E_1) : y'' + y' - 6y = 0$, $(E_2) : y'' - 6y' + 9y = 0$ et $(E_3) : y'' + 2y' + 5y = 0$.

► [Afficher](#) / [Masquer la solution](#)

Remarque

Cas particulier $b = \omega^2 > 0$, $a = 0$: les solutions de $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$.

**3. Solution vérifiant des conditions initiales****Propriété 4**

On considère des réels a , b , x_0 , y_0 et y_1 . L'équation $y'' + ay' + by = 0$ admet une **unique** solution f vérifiant $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.

Application 2

Déterminer la solution f de $(E_1) : y'' + y' - 6y = 0$ vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 7$.

► [Afficher](#) / [Masquer la solution](#)

Application 3

Déterminer la solution g de l'équation $y'' + 4y = 0$ vérifiant $g(0) = 1$ et $g'(0) = -2$.

► Afficher / Masquer la solution

III. Exemples de modélisation

1. Croissance et décroissance exponentielles

Exemple 4

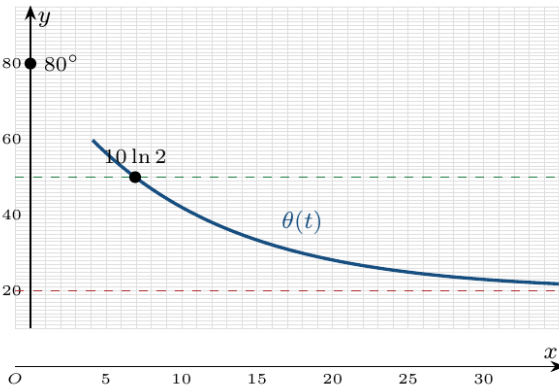
Une population de bactéries évolue de sorte que sa vitesse de croissance soit proportionnelle à son effectif : $N'(t) = kN(t)$ (avec t en heures et $k > 0$). Si $N(0) = N_0$, alors $N(t) = N_0e^{kt}$. La population double lorsque $e^{kt} = 2$, c'est-à-dire au bout de $t = \frac{\ln 2}{k}$ heures.

2. Loi de refroidissement

Application 4

La température $\theta(t)$ (en °C) d'un objet placé dans une pièce à 20°C vérifie $\theta'(t) = -0,1(\theta(t) - 20)$, où $t \geq 0$ est le temps en minutes, et $\theta(0) = 80$. Déterminer $\theta(t)$, puis l'instant où la température atteint 50°C.

► Afficher / Masquer la solution



Résumé

À retenir

Notion	À retenir
$y' = ay$	$y(x) = Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$
$y' = ay + b$ ($a \neq 0$)	$y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$; unique f avec $f(x_0) = y_0$
$y'' + ay' + by = 0$	Équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$, $\Delta = a^2 - 4b$
$\Delta > 0$	$y(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$
$\Delta = 0$	$y(x) = (\alpha x + \beta)e^{rx}$
$\Delta < 0$	$y(x) = e^{px}(\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx))$
Conditions	$f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y_1$ déterminent une unique solution