Examen national du baccalauréat

Session normale 2008

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (toutes options) et Sciences et Technologies
Code NS 22 — Durée : 3 h — Coefficient : 7

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Problème : étude de fonctions, calcul intégral et suites	11 points

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les deux points $A(0, -1, 1)$ et $B(1, -1, 0)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$$

1. *(1.25 pt)* Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1, 0, 2)$ et que son rayon est $\sqrt{3}$ et vérifier que A appartient à (S).

Correction

On complète les carrés :

$$x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \qquad \text{et} \qquad z^2 - 4z = (z-2)^2 - 4.$$

L'équation de (S) s'écrit donc $(x-1)^2 - 1 + y^2 + (z-2)^2 - 4 + 2 = 0$, c'est-à-dire

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = 3 = \left(\sqrt{3}\right)^2.$$

Donc (S) est la sphère de centre $\Omega(1, 0, 2)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$.
Pour $A(0, -1, 1)$: $0^2 + (-1)^2 + 1^2 - 2 \times 0 - 4 \times 1 + 2 = 1 + 1 - 4 + 2 = 0$. Les coordonnées de A vérifient l'équation de (S), donc $A \in (S)$.

2. *(1.25 pt)* Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ et montrer que $x + y + z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

Correction

On a $\overrightarrow{OA}(0, -1, 1)$ et $\overrightarrow{OB}(1, -1, 0)$.

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = (0+1)\vec{i} - (0-1)\vec{j} + (0+1)\vec{k}$$

Donc $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, de coordonnées $(1, 1, 1)$.
Ce vecteur est non nul : les points O, A, B ne sont pas alignés et $\vec{n}(1, 1, 1)$ est normal au plan (OAB). Une équation de (OAB) est de la forme $x + y + z + d = 0$; comme $O(0, 0, 0) \in (OAB)$, on a $d = 0$.
Donc $(OAB) : x + y + z = 0$.

3. *(0.5 pt)* Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S) au point A.

Correction

$$d\big(\Omega,(OAB)\big)=\frac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=R.$$

La distance du centre au plan est égale au rayon : le plan (OAB) est tangent à (S).
Le point de contact est l'unique point commun au plan et à la sphère. Or $A\in(OAB)$ (car $0-1+1=0$) et $A\in(S)$ (question 1). Donc (OAB) est tangent à (S) au point A.
(Vérification : $\overrightarrow{\Omega A}(-1,-1,-1)=-\vec{n}$ est bien normal au plan.)

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

1. *(1 pt)* Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2-6z+34=0$$

Correction

Le discriminant est $\Delta=(-6)^2-4\times1\times34=36-136=-100=(10i)^2<0$.
L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{6-10i}{2}=3-5i \qquad \text{et} \qquad z_2=\frac{6+10i}{2}=3+5i.$$

Donc $S=\{3-5i\,;\,3+5i\}$.

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a=3+5i, \qquad b=3-5i \qquad \text{et} \qquad c=7+3i.$$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $4-2i$.

2.a. *(0.75 pt)* Montrer que $z'=z+4-2i$ et vérifier que C est l'image du point A par la translation T.

Correction

$M'=T(M)\iff\overrightarrow{MM'}=\vec{u}\iff z'-z=4-2i\iff z'=z+4-2i$.
Pour le point A : $a+4-2i=3+5i+4-2i=7+3i=c$. Donc $T(A)=C$.

2.b. *(0.5 pt)* Montrer que $\dfrac{b-c}{a-c}=2i$

Correction

$b-c=3-5i-7-3i=-4-8i$ et $a-c=3+5i-7-3i=-4+2i$.
Or $2i(a-c)=2i(-4+2i)=-8i+4i^2=-4-8i=b-c$.
Donc $\dfrac{b-c}{a-c}=2i$.

2.c. *(0.75 pt)* En déduire que le triangle ABC est rectangle et que $BC=2AC$.

Correction

$\dfrac{b-c}{a-c}=2i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$, donc :

— $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{b-c}{a-c}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$: le triangle ABC est rectangle en C ;

— $\left|\dfrac{b-c}{a-c}\right|=|2i|=2$, donc $\dfrac{CB}{CA}=2$, c'est-à-dire $BC=2AC$.

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une boîte contient six boules rouges et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

1. On tire simultanément et au hasard trois boules de l'boîte.

1.a. *(1 pt)* Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges et une verte.

Correction

L'boîte contient 9 boules. Un tirage simultané de 3 boules est une combinaison de 3 éléments parmi 9 :

$$\operatorname{card}\Omega = C_9^3 = \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1} = 84.$$

Les tirages sont équiprobables. Soit E : « tirer deux boules rouges et une verte ».

$$\operatorname{card} E = C_6^2 \times C_3^1 = 15\times 3 = 45, \qquad p(E) = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}.$$

1.b. *(1 pt)* Montrer que la probabilité de tirer une boule verte au moins est $\dfrac{16}{21}$

Correction

Soit F : « tirer au moins une boule verte ». Son contraire est $\overline{F}$: « tirer trois boules rouges ».

$$p\left(\overline{F}\right) = \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21} \qquad \text{donc} \qquad p(F) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}.$$

2. *(1 pt)* On considère dans cette question l'épreuve suivante : on tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'boîte. Calculer la probabilité de tirer trois boules rouges.

Correction

Un tirage successif sans remise de 3 boules est un arrangement de 3 éléments parmi 9 :

$$\operatorname{card}\Omega' = A_9^3 = 9\times 8\times 7 = 504.$$

Les tirages favorables sont les arrangements de 3 boules parmi les 6 rouges : $A_6^3 = 6\times 5\times 4 = 120$.

$$p(\text{« trois boules rouges »}) = \frac{120}{504} = \frac{5}{21}.$$

(On retrouve le même résultat qu'au tirage simultané.)

Problème (11 points)

I. Soit g la fonction numérique définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x) = x - 2\ln x$

1.a. *(0.5 pt)* Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

Correction

g est dérivable sur $]0,+\infty[$ (somme de fonctions dérivables) et pour tout $x > 0$:

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}.$$

1.b. *(0.5 pt)* Montrer que g est décroissante sur $]0,2]$ et croissante sur $[2,+\infty[$.

Correction

Pour $x > 0$, $g'(x)$ a le signe de $x - 2$:

— si $0 < x \leq 2$: $g'(x) \leq 0$, donc g est décroissante sur $]0,2]$;

— si $x \geq 2$: $g'(x) \geq 0$, donc g est croissante sur $[2,+\infty[$.

2. *(0.5 pt)* En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$ (remarquer que $g(2) > 0$).

Correction

D'après 1.b., g admet un minimum absolu en 2 sur $]0,+\infty[$:

$$g(2) = 2 - 2\ln 2 = 2(1-\ln 2) > 0 \quad \text{car } \ln 2 < 1 \ (2 < e).$$

Donc pour tout $x > 0$: $g(x) \geq g(2) > 0$.

II. On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - (\ln x)^2$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. *(0.75 pt)* Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

Correction

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$; et $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$. Donc

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty.$$

Interprétation : la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote verticale à (C).

2.a. *(0.5 pt)* Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (on pourra poser $t = \sqrt{x}$, on rappelle que : $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$)

Correction

Posons $t = \sqrt{x}$; alors $x = t^2$, $\ln x = 2 \ln t$ et $t \to +\infty$ quand $x \to +\infty$.

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(2 \ln t)^2}{t^2} = 4 \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2.$$

Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\ln t}{t} = 0$, on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x} = 4 \times 0^2 = 0$.

2.b. *(0.75 pt)* En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ (remarquer que : $f(x) = x \left(1 - \dfrac{(\ln x)^2}{x} \right)$)

Correction

Pour $x > 0$: $f(x) = x \left(1 - \dfrac{(\ln x)^2}{x} \right)$. D'après 2.a., $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{(\ln x)^2}{x} \right) = 1$, donc

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \times 1 = +\infty.$$

De plus $\dfrac{f(x)}{x} = 1 - \dfrac{(\ln x)^2}{x}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 - 0 = 1$.

2.c. *(0.5 pt)* Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$.

Correction

$f(x) - x = -(\ln x)^2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = -\infty$.

Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = -\infty$ (limite infinie) : la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction la droite $(\Delta) : y = x$.

2.d. *(0.25 pt)* Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (Δ).

Correction

Pour tout $x > 0$: $f(x) - x = -(\ln x)^2 \leq 0$, avec égalité si et seulement si $\ln x = 0$, c'est-à-dire $x = 1$.
Donc (C) est au-dessous de (Δ) sur $]0, +\infty[$; les deux courbes ont un seul point commun, le point d'abscisse 1, c'est-à-dire $(1, 1)$.

3.a. *(0.75 pt)* Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ et montrer que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

Correction

f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et, comme $\left((\ln x)^2\right)' = 2\ln x \times \dfrac{1}{x}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{2\ln x}{x} = \frac{x - 2\ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}.$$

D'après I.2., $g(x) > 0$ et $x > 0$, donc $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$: f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

3.b. *(0.25 pt)* Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Correction

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3.c. *(0.5 pt)* Montrer que $y = x$ est une équation cartésienne de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

Correction

La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
$f(1) = 1 - (\ln 1)^2 = 1$ et $f'(1) = \dfrac{g(1)}{1} = 1 - 2\ln 1 = 1$.
Donc $y = 1 \times (x-1) + 1$, soit $y = x$: la tangente en 1 est la droite (Δ).

4. *(0.5 pt)* Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$ et que $\dfrac{1}{e} < \alpha < \dfrac{1}{2}$ (on admet que : $(\ln 2)^2 < \dfrac{1}{2}$).

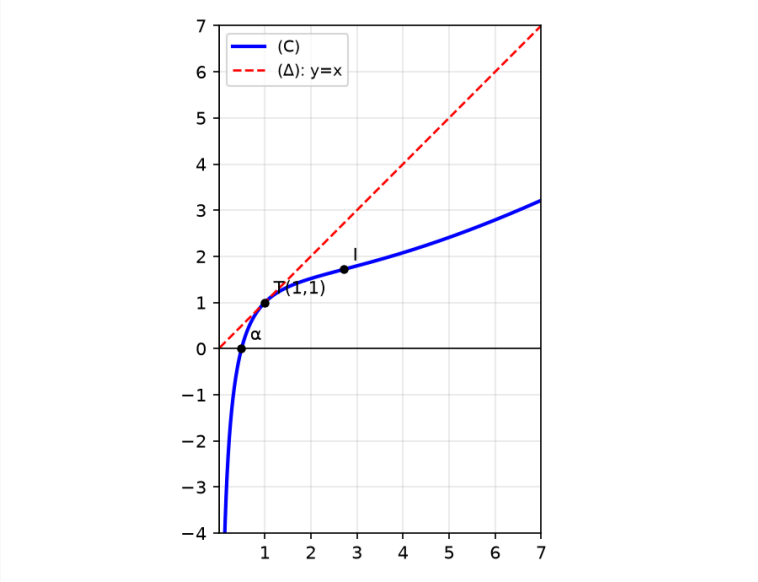
Correction

f est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$; c'est donc une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{0^+} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[= \mathbb{R}$. Comme $0 \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0,+\infty[$.
Encadrement :
— $f\left(\dfrac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e} - (\ln e^{-1})^2 = \dfrac{1}{e} - 1 < 0$;
— $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - (\ln 2)^2 > 0$ car $(\ln 2)^2 < \dfrac{1}{2}$.
f est continue sur $\left[\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{2}\right]$ et $f\left(\dfrac{1}{e}\right) \times f\left(\dfrac{1}{2}\right) < 0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires (et l'unicité de α) : $\dfrac{1}{e} < \alpha < \dfrac{1}{2}$.
(Valeur approchée : $\alpha \approx 0{,}495$.)

5. *(1 pt)* Tracer la droite (Δ) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on admet que $I(e, e-1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C) et on prendra $e \approx 2{,}7$).

Correction

Éléments utiles au tracé : asymptote verticale $x = 0$; branche parabolique de direction (Δ) en $+\infty$; (C) sous (Δ), tangente à (Δ) en $(1,1)$; (C) coupe l'axe des abscisses en $\alpha \approx 0{,}49$; point d'inflexion $I(e, e-1) \approx (2{,}7\,;\,1{,}7)$.



6.a. *(0.5 pt)* Montrer que : $H : x \longmapsto x\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $\ln : x \longmapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ puis montrer que $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx = 1$.

Correction

H est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour $x > 0$:

$$H'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x.$$

Donc H est une primitive de ln sur $]0,+\infty[$, et

$$\int_1^e \ln x\,dx = \big[x\ln x - x\big]_1^e = (e\ln e - e) - (1 \times \ln 1 - 1) = 0 - (-1) = 1.$$

6.b. *(0.75 pt)* En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\,dx = e - 2$.

Correction

On pose $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$; alors $u'(x) = \dfrac{2\ln x}{x}$ et $v(x) = x$. Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[1,e]$.

$$\int_1^e (\ln x)^2\,dx = \Big[x(\ln x)^2\Big]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{2\ln x}{x}\,dx = (e \times 1 - 0) - 2\int_1^e \ln x\,dx = e - 2 \times 1.$$

Donc $\displaystyle\int_1^e (\ln x)^2\,dx = e - 2$.

6.c. *(0.5 pt)* Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (Δ) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Correction

Sur $[1,e]$, (C) est au-dessous de (Δ) (II.2.d), donc $|f(x) - x| = x - f(x) = (\ln x)^2$. L'aire cherchée vaut, en unités d'aire :

$$\mathcal{A} = \int_1^e \big(x - f(x)\big)\,dx = \int_1^e (\ln x)^2\,dx = e - 2 \text{ u.a.}$$

(Le repère n'ayant pas d'unité précisée, l'aire est exprimée en unités d'aire ; $e - 2 \approx 0{,}72$.)

III. On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1. *(0.75 pt)* Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (vous pouvez utiliser le résultat de la question II.3.a.).

Correction

Raisonnons par récurrence.
Initialisation. $u_0 = 2$, donc $1 \leq u_0 \leq 2$.
Hérédité. Supposons $1 \leq u_n \leq 2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. La fonction f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (II.3.a), donc

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(2), \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 1 \leq u_{n+1} \leq 2 - (\ln 2)^2.$$

Comme $(\ln 2)^2 > 0$, on a $2 - (\ln 2)^2 < 2$, donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.
D'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq u_n \leq 2$.

2. *(0.5 pt)* Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -(\ln u_n)^2 \leq 0.$$

Donc $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n : la suite (u_n) est décroissante.
(On peut aussi utiliser II.2.d : (C) est au-dessous de (Δ), donc $f(x) \leq x$.)

3. *(0.75 pt)* En déduire que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

Correction

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite.

— La fonction f est continue sur $I = [1, 2]$;
— $f(I) = [f(1), f(2)] = [1, 2 - (\ln 2)^2] \subset I$;
— $u_0 \in I$ et (u_n) converge.

Donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ dans I :

$$f(\ell) = \ell \iff -(\ln \ell)^2 = 0 \iff \ln \ell = 0 \iff \ell = 1.$$

Comme $1 \in I$, on conclut : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.