

Examen national du baccalauréat

Session normale 2008

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (toutes options) et Sciences et Technologies
Code NS 22 — Durée : 3 h — Coefficient : 7

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Problème : étude de fonctions, calcul intégral et suites	11 points

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les deux points $A(0, -1, 1)$ et $B(1, -1, 0)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$$

1. (1.25 pt) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1, 0, 2)$ et que son rayon est $\sqrt{3}$ et vérifier que A appartient à (S) .

► Afficher / Masquer la solution

2. (1.25 pt) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ et montrer que $x + y + z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB) .

► Afficher / Masquer la solution

3. (0.5 pt) Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S) au point A .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

1. (1 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 6z + 34 = 0$$

► Afficher / Masquer la solution

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les points A , B et C d'affixes respectives :

$$a = 3 + 5i, \quad b = 3 - 5i \quad \text{et} \quad c = 7 + 3i.$$

Soit z l'afixe d'un point M du plan et z' l'afixe du point M' image de M par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'afixe $4 - 2i$.

2.a. (0.75 pt) Montrer que $z' = z + 4 - 2i$ et vérifier que C est l'image du point A par la translation T .

► Afficher / Masquer la solution

2.b. (0.5 pt) Montrer que $\frac{b - c}{a - c} = 2i$

► Afficher / Masquer la solution

2.c. (0.75 pt) En déduire que le triangle ABC est rectangle et que $BC = 2AC$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une boîte contient six boules rouges et trois boules vertes (les boules sont indiscernables au toucher).

1. On tire simultanément et au hasard trois boules de l'boîte.

1.a. (1 pt) Calculer la probabilité de tirer deux boules rouges et une verte.

► Afficher / Masquer la solution

1.b. (1 pt) Montrer que la probabilité de tirer une boule verte au moins est $\frac{16}{21}$

► Afficher / Masquer la solution

2. (1 pt) On considère dans cette question l'épreuve suivante : on tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'boîte. Calculer la probabilité de tirer trois boules rouges.

► Afficher / Masquer la solution

Problème (11 points)

I. Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 2 \ln x$

1.a. (0.5 pt) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

1.b. (0.5 pt) Montrer que g est décroissante sur $]0, 2]$ et croissante sur $[2, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

2. (0.5 pt) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$ (remarquer que $g(2) > 0$).

► Afficher / Masquer la solution

II. On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - (\ln x)^2$

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (0.75 pt) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.

► Afficher / Masquer la solution

2.a. (0.5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (on pourra poser $t = \sqrt{x}$, on rappelle que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$)

► Afficher / Masquer la solution

2.b. (0.75 pt) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ (remarquer que : $f(x) = x \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x}\right)$)

► Afficher / Masquer la solution

2.c. (0.5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$.

► Afficher / Masquer la solution

2.d. (0.25 pt) Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (Δ) .

► Afficher / Masquer la solution

3.a. (0.75 pt) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ et montrer que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

► Afficher / Masquer la solution

3.b. (0.25 pt) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

► Afficher / Masquer la solution

3.c. (0.5 pt) Montrer que $y = x$ est une équation cartésienne de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

► Afficher / Masquer la solution

4. (0.5 pt) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]0, +\infty[$ et que $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$ (on admet que : $(\ln 2)^2 < \frac{1}{2}$).

► Afficher / Masquer la solution

5. (1 pt) Tracer la droite (Δ) et la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on admet que $I(e, e - 1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C) et on prendra $e \approx 2,7$).

► Afficher / Masquer la solution

6.a. (0.5 pt) Montrer que : $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ puis montrer que $\int_1^e \ln x \, dx = 1$.

► Afficher / Masquer la solution

6.b. (0.75 pt) En utilisant une intégration par parties, montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2$.

► Afficher / Masquer la solution

6.c. (0.5 pt) Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C) , la droite (Δ) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

► Afficher / Masquer la solution

III. On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$

1. (0.75 pt) Montrer que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$ (vous pouvez utiliser le résultat de la question II.3.a.).

► Afficher / Masquer la solution

2. (0.5 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

► Afficher / Masquer la solution

3. (0.75 pt) En déduire que (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.

► Afficher / Masquer la solution