

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2008

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (toutes options) et Sciences et Technologies
Code RS 22 — Durée : 3 h — Coefficient : 7

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

	Domaine	Barème
Exercice 1	Nombres complexes	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Suites numériques	3 points
Problème	Étude de fonctions	8 points

Exercice 1 : Nombres complexes (3 points)

1. (1 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 8z + 17 = 0$$

► Afficher / Masquer la solution

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les points A et B d'affixes respectives $a = 4 + i$ et $b = 8 + 3i$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + 2i$ et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

2.a. (0.75 pt) Montrer que $z' = -iz - 1 + 3i$.

► Afficher / Masquer la solution

2.b. (0.5 pt) Vérifier que l'affixe du point C image du point A par la rotation R est $c = -i$.

► Afficher / Masquer la solution

2.c. (0.75 pt) Montrer que : $b - c = 2(a - c)$, puis en déduire que les points A , B et C sont alignés.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le plan (P) d'équation : $x + 2y + z - 1 = 0$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0$$

1. (0.75 pt) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $I(2, 3, -1)$ et son rayon est 3.

► Afficher / Masquer la solution

2.a. (0.5 pt) Montrer que la distance du point I au plan (P) est $\sqrt{6}$.

► Afficher / Masquer la solution

2.b. (0.75 pt) En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{3}$.

► Afficher / Masquer la solution

3.a. (0.5 pt) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par I et orthogonale à (P) .

► Afficher / Masquer la solution

3.b. (0.5 pt) Montrer que le centre du cercle (Γ) est le point $H(1, 1, -2)$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une boîte contient quatre boules blanches et trois boules rouges (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de la boîte.

1. (1 pt) Quelle est la probabilité de tirer trois boules blanches ?

► Afficher / Masquer la solution

2. (1 pt) Montrer que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est $\frac{1}{7}$.

► Afficher / Masquer la solution

3. (1 pt) Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule blanche ?

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 : Suites numériques (3 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (1 pt) Montrer que : $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

2. On pose : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2.a. (1 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ puis exprimer v_n en fonction de n .

► Afficher / Masquer la solution

2.b. (1 pt) Montrer que : $u_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n) .

► Afficher / Masquer la solution

Problème (8 points)

I. On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - 2x$.

1. (1 pt) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis montrer que g est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $] -\infty, 0]$.

► Afficher / Masquer la solution

2. (0.75 pt) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ (remarquer que $g(0) = 1$).

► Afficher / Masquer la solution

II. On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(e^{2x} - 2x)$. Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1.a. (0.5 pt) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

► Afficher / Masquer la solution

1.b. (0.25 pt) Vérifier que : $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2\right) \frac{\ln(e^{2x} - 2x)}{e^{2x} - 2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

► Afficher / Masquer la solution

1.c. (0.5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (on rappelle : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$).

► Afficher / Masquer la solution

1.d. (0.25 pt) En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $-\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

► Afficher / Masquer la solution

2.a. (0.75 pt) Pour tout x de $[0, +\infty[$, vérifier que : $1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0$ et que $2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) = f(x)$.

► Afficher / Masquer la solution

2.b. (0.5 pt) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (on rappelle : $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$).

► Afficher / Masquer la solution

2.c. (0.5 pt) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

► Afficher / Masquer la solution

2.d. (0.75 pt) Montrer que : $f(x) - 2x \leq 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$ et en déduire que (C) est en-dessous de (D) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

3.a. (0.75 pt) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{2(e^{2x} - 1)}{g(x)}$.

► Afficher / Masquer la solution

3.b. (0.5 pt) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

► Afficher / Masquer la solution

4. (1 pt) Tracer (C) et (D) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (On admet que la courbe (C) a deux points d'inflexion).

► Afficher / Masquer la solution