

# Examen national du baccalauréat

## Session de rattrapage 2008

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

**Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (toutes options) et Sciences et Technologies**

Code RS 22 — Durée : 3 h — Coefficient : 7

*L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.*

|            | Domaine                 | Barème   |
|------------|-------------------------|----------|
| Exercice 1 | Nombres complexes       | 3 points |
| Exercice 2 | Géométrie dans l'espace | 3 points |
| Exercice 3 | Calcul des probabilités | 3 points |
| Exercice 4 | Suites numériques       | 3 points |
| Problème   | Étude de fonctions      | 8 points |

### Exercice 1 : Nombres complexes (3 points)

1. (1 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$z^2 - 8z + 17 = 0$$

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a = 4 + i$  et  $b = 8 + 3i$ . Soit  $z$  l'affixe d'un point  $M$  du plan et  $z'$  l'affixe du point  $M'$  image de  $M$  par la rotation  $R$  de centre  $\Omega$  d'affixe  $\omega = 1 + 2i$  et d'angle  $\frac{3\pi}{2}$ .

2.a. (0.75 pt) Montrer que  $z' = -iz - 1 + 3i$ .

2.b. (0.5 pt) Vérifier que l'affixe du point  $C$  image du point  $A$  par la rotation  $R$  est  $c = -i$ .

2.c. (0.75 pt) Montrer que :  $b - c = 2(a - c)$ , puis en déduire que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.

### Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , le plan  $(P)$  d'équation :  $x + 2y + z - 1 = 0$  et la sphère  $(S)$  d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0$$

1. (0.75 pt) Montrer que le centre de la sphère  $(S)$  est le point  $I(2, 3, -1)$  et son rayon est 3.

2.a. (0.5 pt) Montrer que la distance du point  $I$  au plan  $(P)$  est  $\sqrt{6}$ .

2.b. (0.75 pt) En déduire que le plan  $(P)$  coupe la sphère  $(S)$  suivant un cercle  $(\Gamma)$  de rayon  $\sqrt{3}$ .

3.a. (0.5 pt) Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(D)$  passant par  $I$  et orthogonale à  $(P)$ .

3.b. (0.5 pt) Montrer que le centre du cercle  $(\Gamma)$  est le point  $H(1, 1, -2)$ .

**Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)**

Une boîte contient quatre boules blanches et trois boules rouges (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de la boîte.

1. (1 pt) Quelle est la probabilité de tirer trois boules blanches ?
2. (1 pt) Montrer que la probabilité de tirer trois boules de même couleur est  $\frac{1}{7}$ .
3. (1 pt) Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule blanche ?

**Exercice 4 : Suites numériques (3 points)**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. (1 pt) Montrer que :  $u_n > 1$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .
2. On pose :  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .
  - 2.a. (1 pt) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{3}{5}$  puis exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - 2.b. (1 pt) Montrer que :  $u_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  puis calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Problème (8 points)**

I. On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = e^{2x} - 2x$ .

1. (1 pt) Calculer  $g'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  puis montrer que  $g$  est croissante sur  $[0, +\infty[$  et décroissante sur  $] -\infty, 0]$ .
2. (0.75 pt) En déduire que  $g(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  (remarquer que  $g(0) = 1$ ).

II. On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \ln(e^{2x} - 2x)$ . Soit  $(C)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1.a. (0.5 pt) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .
- 1.b. (0.25 pt) Vérifier que :  $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2\right) \frac{\ln(e^{2x} - 2x)}{e^{2x} - 2x}$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^*$ .
- 1.c. (0.5 pt) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  (on rappelle :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ ).
- 1.d. (0.25 pt) En déduire que la courbe  $(C)$  admet, au voisinage de  $-\infty$ , une branche parabolique dont on précisera la direction.
- 2.a. (0.75 pt) Pour tout  $x$  de  $[0, +\infty[$ , vérifier que :  $1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0$  et que  $2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) = f(x)$ .
- 2.b. (0.5 pt) En déduire que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (on rappelle :  $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ ).
- 2.c. (0.5 pt) Montrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = 2x$  est une asymptote oblique à la courbe  $(C)$  au voisinage de  $+\infty$ .
- 2.d. (0.75 pt) Montrer que :  $f(x) - 2x \leq 0$  pour tout  $x$  de  $[0, +\infty[$  et en déduire que  $(C)$  est en-dessous de  $(D)$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .
- 3.a. (0.75 pt) Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $f'(x) = \frac{2(e^{2x} - 1)}{g(x)}$ .
- 3.b. (0.5 pt) Étudier le signe de  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  puis dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
4. (1 pt) Tracer  $(C)$  et  $(D)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (On admet que la courbe  $(C)$  a deux points d'inflexion).