

Examen national du baccalauréat

Session normale 2009

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (toutes options) et Sciences et Technologies

Code NS 22 — Durée : 3 h — Coefficient : 7

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Calcul intégral	2 points
Problème	Étude de fonction et suite numérique	9 points

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(-2, 2, 8)$, $B(6, 6, 0)$, $C(2, -1, 0)$ et $D(0, 1, -1)$ et (S) l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

- (0.75 pt) Déterminer le triplet des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{OD}$ et en déduire que $x + 2y + 2z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OCD) .
- (0.5 pt) Vérifier que (S) est la sphère de centre $\Omega(2, 4, 4)$ et de rayon 6.
- a. (0.5 pt) Calculer la distance du point Ω au plan (OCD) .
- b. (0.5 pt) En déduire que le plan (OCD) est tangent à la sphère (S) .
- c. (0.75 pt) Vérifier que : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ puis en déduire que le point O est le point de contact de la sphère (S) et du plan (OCD) .

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A , B et C d'affixes respectives : $a = 2 - 2i$, $b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ et $c = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$.

- (1 pt) Écrire sous forme trigonométrique chacun des deux nombres complexes a et b .
- On considère la rotation R de centre le point O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$.
 - (0.75 pt) Soit z l'affixe d'un point M du plan complexe et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R . Montrer que : $z' = bz$.
 - (0.5 pt) Vérifier que le point C est l'image du point A par la rotation R .
 - (0.75 pt) Montrer que : $\arg c \equiv \arg a + \arg b [2\pi]$ puis en déduire un argument du nombre complexe c .

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges (les boules sont indiscernables au toucher). On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne.

1. (1.5 pt) On considère les deux événements suivants : A : « Tirer trois boules de même couleur » ; B : « Tirer trois boules de couleurs différentes deux à deux ». Montrer que : $P(A) = \frac{3}{44}$ et $P(B) = \frac{3}{11}$.

2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de trois boules associe le nombre de couleurs que portent ces boules.

2.a. (0.25 pt) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .

2.b. (1.25 pt) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

Exercice 4 : Calcul intégral (2 points)

On pose : $J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6) dx$ et $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3} dx$.

1.a. (0.25 pt) Vérifier que : $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$ pour tout réel x différent de -3 .

1.b. (0.75 pt) Montrer que : $I = 1 - 3 \ln 2$.

2. (1 pt) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $J = -I$.

Problème (9 points)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = 2 \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$$

(C) désigne la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

I.1. (0.75 pt) Vérifier que : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$.

I.2. (0.75 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 4$ et interpréter le résultat géométriquement.

I.3.a. (1 pt) Montrer que : $f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1}$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et vérifier que $f'(0) = 0$.

I.3.b. (1 pt) Étudier le signe de $\sqrt{e^x} - 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et décroissante sur l'intervalle $] -\infty, 0]$.

I.4.a. (0.25 pt) Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = 2x + 2 \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$.

I.4.b. (0.5 pt) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

I.5.a. (0.25 pt) Vérifier que : $e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

I.5.b. (0.5 pt) Étudier le signe de $\sqrt{e^x} - 2$ et de $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$ sur $\mathbb{R}$.

I.5.c. (0.25 pt) En déduire que : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$ pour tout $x \in [0, \ln 4]$.

I.5.d. (0.5 pt) Montrer que : $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [0, \ln 4]$.

I.6. (0.75 pt) Tracer la courbe (C) (on admettra que la courbe (C) possède deux points d'inflexion dont l'abscisse de l'un est inférieure à -1 et l'abscisse de l'autre est supérieure à 2 , la détermination de ces deux points n'est pas demandée et on prendra $\ln 4 \approx 1,4$).

II. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$. On pourra, ci-après, utiliser les résultats de l'étude de la fonction f .

II.1. (0.75 pt) Montrer que : $0 \leq u_n \leq \ln 4$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

II.2. (0.75 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

II.3. (1 pt) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.