

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2009

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (toutes options) et Sciences et Technologies
Code RS 22 — Durée : 3 h — Coefficient : 7

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Suites numériques	3 points
Exercice 5	Calcul intégral	2 points
Exercice 6	Étude de fonction	6 points

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point $A(2, 2, -1)$, le plan (P) d'équation $2x + y + 2z - 13 = 0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1, 0, 1)$ et de rayon 3.

1.a. (0.75 pt) Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 7 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) et vérifier que A appartient à (S) .

► Afficher / Masquer la solution

1.b. (0.75 pt) Calculer la distance du point Ω au plan (P) puis en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S) .

► Afficher / Masquer la solution

2. Soit (D) la droite passant par le point A et perpendiculaire au plan (P) .

2.a. (0.75 pt) Démontrer que $\vec{u}(2, 1, 2)$ est un vecteur directeur de la droite (D) et que $(6, -6, -3)$ est le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}$.

► Afficher / Masquer la solution

2.b. (0.75 pt) Calculer $\frac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$ puis en déduire que la droite (D) est tangente à la sphère (S) en A .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

1. (1 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 25 = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a = 3 + 4i$, $b = 3 - 4i$, $c = 2 + 3i$ et $d = 5 + 6i$.

2.a. (0.5 pt) Calculer $\frac{d - c}{a - c}$ puis en déduire que les points A, C et D sont alignés.

► Afficher / Masquer la solution

2.b. (0.5 pt) Montrer que le nombre $p = 3 + 8i$ est l'affixe du point P image du point A par l'homothétie h de centre B et de rapport $\frac{3}{2}$.

► Afficher / Masquer la solution

2.c. (1 pt) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{d-p}{a-p}$ puis en déduire que $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PD}}\right)$ et que $PA = \sqrt{2}PD$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient sept boules noires et deux boules blanches (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches restantes dans l'urne après le tirage des deux boules.

1. (0.5 pt) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .

► Afficher / Masquer la solution

2. (1.5 pt) Montrer que $p(X = 0) = \frac{1}{36}$ et $p(X = 1) = \frac{7}{18}$.

► Afficher / Masquer la solution

3. (1 pt) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer l'espérance mathématique $E(X)$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 : Suites numériques (3 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1+4u_n}{7-2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. (1 pt) Vérifier que $1 - u_{n+1} = \frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et montrer par récurrence que $1 - u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

2. On pose $v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- 2.a. (1 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$, puis exprimer v_n en fonction de n .

► Afficher / Masquer la solution

- 2.b. (1 pt) Montrer que $u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis en déduire la limite de la suite (u_n) .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 5 : Calcul intégral (2 points)

1. (1 pt) Déterminer les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto 2x(x^2 - 1)^{2009}$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que :
$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2 - 1)^{2009} dx = \frac{1}{2010}.$$

► Afficher / Masquer la solution

2. (1 pt) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_0^2 (2x+1) \ln(x+1) dx = 6 \ln 3 - 2$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 6 : Étude de fonction (6 points)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)$, et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1.a. (0.5 pt) Vérifier que : $f(x) = x \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right)$ pour tout réel x .

► Afficher / Masquer la solution

1.b. (1 pt) Montrer que la fonction f est paire et que $f(x) - x = \frac{-2xe^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ pour tout réel x .

► Afficher / Masquer la solution

1.c. (1 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2xe^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 0$ puis en déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

► Afficher / Masquer la solution

2. (0.5 pt) Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

3.a. (1 pt) Montrer que : $f'(x) = \frac{e^{4x} - 1 + 4xe^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$ pour tout réel x et vérifier que $f'(0) = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

3.b. (0.5 pt) Montrer que : $e^{4x} - 1 \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$ puis en déduire que : $e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

3.c. (0.5 pt) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

4. (1 pt) Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (on admettra que la courbe possède deux points d'inflexion que l'on ne demande pas de préciser).

► Afficher / Masquer la solution