

Examen national du baccalauréat

Session normale 2010

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (toutes options) et Sciences et Technologies

Code NS 22 — Durée : 3 h — Coefficient : 7

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Suites numériques	3 points
Exercice 5	Étude de fonctions et calcul intégral	8 points

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(-1, 0, 3)$, $B(3, 0, 0)$ et $C(7, 1, -3)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$.

1. (1 pt) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ et en déduire que $3x + 4z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

► Afficher / Masquer la solution

2. (0.5 pt) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(3, 1, 0)$ et que son rayon est 5.

► Afficher / Masquer la solution

3. Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC) .

3.a. (0.5 pt) Démontrer que : $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (Δ) .

► Afficher / Masquer la solution

3.b. (1 pt) Démontrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux points $E(6, 1, 4)$ et $F(0, 1, -4)$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

1. (1 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 10 = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les points A , B et C d'affixes respectives : $a = 3 - i$, $b = 3 + i$ et $c = 7 - 3i$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2.a. (0.5 pt) Montrer que : $z' = iz + 2 - 4i$.

► Afficher / Masquer la solution

2.b. (0.25 pt) Vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $c' = 5 + 3i$.

► Afficher / Masquer la solution

2.c. (1.25 pt) Montrer que : $\frac{c' - b}{c - b} = \frac{1}{2}i$ puis en déduire que le triangle BCC' est rectangle en B et que $BC = 2BC'$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient dix boules : cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules noires (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard et simultanément quatre boules de l'urne.

1. (1 pt) On considère les deux événements : A : « tirer une seule boule rouge » et B : « tirer au moins une boule blanche ». Montrer que : $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{41}{42}$.

► Afficher / Masquer la solution

2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges tirées.

- 2.a. (0.25 pt) Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2 et 3.

► Afficher / Masquer la solution

- 2.b. (1 pt) Montrer que $P(X = 2) = \frac{3}{10}$ et $P(X = 0) = \frac{1}{6}$.

► Afficher / Masquer la solution

- 2.c. (0.75 pt) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. (0.75 pt) Montrer, par récurrence, que : $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

2. On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2.a. (1 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et en déduire que $v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

2.b. (0.75 pt) Montrer que : $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$ et en déduire que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

► Afficher / Masquer la solution

3. (0.5 pt) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ sachant que (w_n) est la suite numérique définie par : $w_n = \ln(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 5 : Étude de fonctions et calcul intégral (8 points)

I. On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$.

I.1. (0.5 pt) Montrer que : $g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

I.2. (0.5 pt) Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et décroissante sur l'intervalle $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

► Afficher / Masquer la solution

I.3.a. (0.5 pt) Montrer que : $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$ puis vérifier que $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$.

► Afficher / Masquer la solution

I.3.b. (0.25 pt) En déduire que : $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

II. Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + x + 1$. Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$).

II.1. (1 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (on rappelle que : $\lim_{u \rightarrow -\infty} ue^u = 0$).

► Afficher / Masquer la solution

II.2. (0.75 pt) Montrer que : $f'(x) = g(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

II.3.a. (0.75 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées.

► Afficher / Masquer la solution

II.3.b. (0.5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)]$ et en déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

► Afficher / Masquer la solution

II.3.c. (0.5 pt) Déterminer le couple de coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et de la courbe (C) puis montrer que la courbe (C) est en-dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left] -\infty, \frac{1}{2} \right]$ et qu'elle est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, +\infty \right[$.

► Afficher / Masquer la solution

II.4.a. (0.25 pt) Montrer que $y = x$ est une équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O .

► Afficher / Masquer la solution

II.4.b. (0.25 pt) Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$ (la détermination de l'ordonnée du point d'inflexion n'est pas demandée).

► Afficher / Masquer la solution

II.5. (0.75 pt) Construire, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les deux droites (Δ) et (T) et la courbe (C) .

► Afficher / Masquer la solution

II.6.a. (1 pt) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_0^1 (2x - 1)e^{2x} dx = 1$.

► Afficher / Masquer la solution

II.6.b. (0.5 pt) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la droite (T) tangente à la courbe (C) et les deux droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

► Afficher / Masquer la solution