

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2010

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (toutes options) et Sciences et Technologies

Code RS 22 — Durée : 3 h — Coefficient : 7

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 4	Suites numériques	3 points
Exercice 5	Étude de fonctions et calcul intégral	8 points

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(0, -2, 0)$, $B(1, 1, -4)$ et $C(0, 1, -4)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$.

1. (0.5 pt) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1, 2, 3)$ et que son rayon est 5.
- 2.a. (1 pt) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$ et en déduire que $4y + 3z + 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .
- 2.b. (0.5 pt) Calculer $d(\Omega, (ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) .
3. Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC) .
- 3.a. (0.5 pt) Démontrer que
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 est une représentation paramétrique de la droite (Δ) .
- 3.b. (0.25 pt) Démontrer que le triplet des coordonnées de H , point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) , est $(1, -2, 0)$.
- 3.c. (0.25 pt) Vérifier que H est le point de contact du plan (ABC) et de la sphère (S) .

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

1. (1 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.
2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A , B et C d'affixes respectives $a = 8i$, $b = 4\sqrt{3} - 4i$ et $c = 2(4\sqrt{3} + 4i)$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$.
- 2.a. (0.5 pt) Montrer que : $z' = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.
- 2.b. (0.25 pt) Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R .
- 2.c. (0.75 pt) Montrer que : $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ puis écrire le nombre $\frac{a-b}{c-b}$ sous forme trigonométrique.
- 2.d. (0.5 pt) En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient huit boules qui portent les nombres suivants : 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3 (les boules sont indiscernables au toucher). On tire au hasard, successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1. (1.25 pt) Soient A et B les deux événements : A : « tirer deux boules portant le nombre 2 » et B : « tirer deux boules dont une au moins porte le nombre 3 ». Montrer que $P(A) = \frac{3}{28}$ et que $P(B) = \frac{13}{28}$.
2. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules portant un nombre impair.
 - 2.a. (0.25 pt) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X .
 - 2.b. (0.75 pt) Montrer que : $P(X = 1) = \frac{15}{28}$.
 - 2.c. (0.75 pt) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

Exercice 4 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{21 + u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. (0.5 pt) Montrer que : $u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. (0.75 pt) Montrer que : $u_{n+1} < \frac{1}{7}u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
3. (0.5 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.
- 4.a. (0.75 pt) Montrer par récurrence que : $u_n \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
- 4.b. (0.5 pt) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 5 : Étude de fonctions et calcul intégral (8 points)

- I.** On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 3$.
- I.1.a.** (0.25 pt) Vérifier que : $3x^3 - x - 2 = (x - 1)(3x^2 + 3x + 2)$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$.
- I.1.b.** (0.5 pt) Montrer que : $g'(x) = \frac{(x - 1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$.
- I.2.a.** (0.25 pt) Vérifier que : $\frac{3x^2 + 3x + 2}{x} > 0$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$.
- I.2.b.** (0.5 pt) En déduire que le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 1$ sur $]0, +\infty[$.
- I.3.a.** (0.5 pt) Montrer que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$ et croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
- I.3.b.** (0.5 pt) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ (remarquer que $g(1) > 0$).
- II.** On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$, et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm).
- II.1.** (1 pt) Montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$, puis en déduire que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
- II.2.a.** (0.5 pt) Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.
- II.2.b.** (0.75 pt) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (on rappelle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$).
- II.2.c.** (0.5 pt) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
- II.3.** (0.5 pt) Montrer que $y = 3(x - 1)$ est une équation de la droite tangente à la courbe (C) au point de coordonnées $(1, 0)$.
- II.4.** (0.75 pt) Construire la droite (Δ) et la courbe (C) (on admettra que la courbe (C) possède un point d'inflexion unique dont la détermination n'est pas demandée).
- II.5.a.** (1 pt) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$ (poser : $v(x) = \ln x$ et $u'(x) = \frac{1}{x^2}$).
- II.5.b.** (0.5 pt) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , la droite (Δ) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est égale à $\left(1 - \frac{1}{e}\right) \text{ cm}^2$.