

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2011

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (toutes options) et Sciences et Technologies
Code RS 22 — Durée : 3 h — Coefficient : 7

L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

	Domaine	Barème
Exercice 1	Équations et inéquations exponentielles	2,5 points
Exercice 2	Nombres complexes	4 points
Exercice 3	Suites numériques	3,5 points
Exercice 4	Étude de fonctions et calcul intégral	10 points

Exercice 1 : Équations et inéquations exponentielles (2,5 points)

1.a. (0,5 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

1.b. (1 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

2. (1 pt) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $e^{x+1} - e^{-x} \geqslant 0$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Nombres complexes (4 points)

1. (1 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 6z + 18 = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les deux points A et B ayant respectivement les affixes : $a = 3 + 3i$ et $b = 3 - 3i$.

2.a. (0,5 pt) Écrire sous la forme trigonométrique les deux nombres a et b .

► Afficher / Masquer la solution

2.b. (0,75 pt) Montrer que b' l'abscisse du point B' image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ est 6.

► Afficher / Masquer la solution

2.c. (1 pt) Montrer que : $\frac{b - b'}{a - b'} = i$ puis déduire que le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B' .

► Afficher / Masquer la solution

2.d. (0,75 pt) Déduire d'après ce qui précède que le quadrilatère $OAB'B$ est un carré.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Suites numériques (3,5 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{6u_n}{1 + 15u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1.a. (0,5 pt) Vérifier que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$.

► Afficher / Masquer la solution

1.b. (0,5 pt) Montrer par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n > \frac{1}{3}$.

► Afficher / Masquer la solution

2. On considère la suite numérique (v_n) définie par, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$.

(1,5 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ puis écrire v_n en fonction de n .

► Afficher / Masquer la solution

3. (1 pt) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ puis déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 : Étude de fonctions et calcul intégral (10 points)

Partie I On considère la fonction numérique g définie sur $I =]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$.

I.1.a. (0,5 pt) Montrer que pour tout $x \in I$: $g'(x) = \frac{x+1}{x}$.

► Afficher / Masquer la solution

I.1.b. (0,5 pt) Montrer que la fonction g est croissante sur I .

► Afficher / Masquer la solution

I.2. (1 pt) Dédurre que : $g(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$ et que $g(x) \leq 0$ sur $]0, 1]$ (remarquer que $g(1) = 0$).

► Afficher / Masquer la solution

Partie II Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x$, et soit (C) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

II.1.a. (0,75 pt) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

► Afficher / Masquer la solution

II.1.b. (1 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (remarquer que pour tout x de I : $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{x-1}{x}\right) \frac{\ln x}{x}$).

► Afficher / Masquer la solution

II.1.c. (0,5 pt) Dédurre que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on déterminera la direction.

► Afficher / Masquer la solution

II.2.a. (1 pt) Montrer que pour tout $x \in I$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

► Afficher / Masquer la solution

II.2.b. (0,5 pt) Dédurre que f est croissante sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $]0, 1]$.

► Afficher / Masquer la solution

II.2.c. (0,25 pt) Donner le tableau de variations de f sur I .

► Afficher / Masquer la solution

II.3. (1 pt) Tracer (C) (on admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion d'abscisse comprise entre 1,5 et 2).

► Afficher / Masquer la solution

II.4.a. (0,5 pt) Montrer que : $H : x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de $h : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle I .

► Afficher / Masquer la solution

II.4.b. (0,75 pt) Montrer que : $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}$.

► Afficher / Masquer la solution

II.4.c. (1 pt) En utilisant l'intégration par parties, montrer que : $\int_1^e \ln x dx = 1$.

► Afficher / Masquer la solution

II.5.a. (0,25 pt) Vérifier que pour tout $x \in I$: $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}$.

► Afficher / Masquer la solution

II.5.b. (0,5 pt) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est $0,5 \text{ cm}^2$.

► Afficher / Masquer la solution