

# Examen national du baccalauréat

Session normale 2012

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

**Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales — Option PC & SVT** Durée : 3 h — Coefficient : 7

## Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , les points  $A(1, 1, -1)$ ,  $B(0, 1, -2)$ ,  $C(3, 2, 1)$  et la sphère  $(S)$  d'équation :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 1 = 0$

- 1) (0,5 pt) Montrer que le centre de la sphère  $(S)$  est le point  $\Omega(1, 0, 1)$  et que son rayon est  $\sqrt{3}$
- 2) a) (0,75 pt) Montrer que :  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - \vec{k}$  puis vérifier que  $x - z - 2 = 0$  est une équation cartésienne du plan  $(ABC)$
- b) (1 pt) Vérifier que :  $d(\Omega, (ABC)) = \sqrt{2}$  puis en déduire que le plan  $(ABC)$  coupe la sphère  $(S)$  selon un cercle  $(\Gamma)$  de rayon 1
- 3) Soit  $(\Delta)$  la droite qui passe par le point  $\Omega$  et perpendiculaire au plan  $(ABC)$
- a) (0,25 pt) Démontrer que :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

est une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$

- b) (0,25 pt) Démontrer que le triplet de coordonnées de  $H$  point d'intersection de la droite  $(\Delta)$  et le plan  $(ABC)$  est  $(2, 0, 0)$
- c) (0,25 pt) En déduire le centre du cercle  $(\Gamma)$

## Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

- 1) (0,75 pt) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$ , l'équation :  $z^2 - 12z + 61 = 0$
- 2) On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , les  $A, B$ , et  $C$  d'affixes respectives  $a = 6 - 5i$ ,  $b = 4 - 2i$ , et  $c = 2 + i$
- a) (0,5 pt) Calculer  $\frac{a-c}{b-c}$  puis déduire que les points  $A, C$  et  $D$  sont alignés
- b) (0,5 pt) On considère la translation  $T$  de vecteur  $\vec{u}$  tel que l'affixe de  $\vec{u}$  est  $1 + 5i$  Vérifier que l'affixe du point  $D$  image du point  $C$  par la translation  $T$  est  $d = 3 + 6i$
- c) (0,75 pt) Montrer que :  $\frac{d-c}{b-c} = -1 + i$  et que  $\frac{3\pi}{4}$  est l'argument du nombre complexe  $-1 + i$
- d) (0,5 pt) En déduire une mesure de l'angle orienté  $(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}})$

### Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient huit jetons indiscernables au toucher : un jeton portant le nombre 0, cinq jetons portant chacun le nombre 1 et deux jetons portant chacun le nombre 2. On tire au hasard, et simultanément, trois jetons de l'urne.

- 1) (1 pt) Soit  $A$  l'événement : « Les trois jetons tirés portent des nombres différents deux à deux ». Montrer que :  

$$P(A) = \frac{5}{28}$$
- 2) (1 pt) Soit  $B$  l'événement : « La somme des nombres portés par les jetons tirés est égale à 5 ». Montrer que :  

$$P(B) = \frac{5}{56}$$
- 3) (1 pt) Soit  $C$  l'événement : « La somme des nombres portés par les jetons tirés est égale à 4 ». Montrer que :  

$$P(C) = \frac{3}{8}$$

### Exercice 4 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 11$  et  $u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

- 1) (0,25 pt) Vérifier que :  $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .
- 2) a) (0,5 pt) Montrer, par récurrence, que :  $u_n < 12$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .
- b) (0,5 pt) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- c) (0,25 pt) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- 3) Soit  $(v_n)$  la suite numérique telle que :  $v_n = u_n - 12$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :
  - a) (0,75 pt) On utilisant la question 1), montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{10}{11}$ , puis exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - b) (0,75 pt) Montrer que :  $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  et calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .

## Exercice 5 : Étude de fonctions numériques et calcul intégral (8 points)

**Partie I**

Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$

**1)** (0,75 pt) Montrer que :  $x^2 - 1$  et  $2x^2 \ln x$  ont le même signe sur l'intervalle  $]0; 1[$  puis déduire que  $g(x) \leq 0$  pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; 1[$

**2)** (0,75 pt) Montrer que  $x^2 - 1$  et  $2x^2 \ln x$  ont le même signe sur l'intervalle  $]1; +\infty[$  puis déduire que  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $]1; +\infty[$

**Partie II**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = (x^2 - 1) \ln x$  Et soit  $(C)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 3 cm)

**1) a)** (0,5 pt) Montrer que :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$  puis interpréter le résultat géométriquement

**b)** (1 pt) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , puis montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  (On pourra écrire  $\frac{f(x)}{x}$  sous la forme  $\frac{x^2 - 1}{x} \ln x$ ) et en déduire que la courbe  $(C)$  admet une branche parabolique au voisinage de  $+\infty$  dont on précisera la direction

**2) a)** (1,25 pt) Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$  pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$  et interpréter géométriquement le résultat  $f'(1) = 0$

**b)** (0,5 pt) Montrer que la fonction  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $]0; 1[$  et croissante sur l'intervalle  $]1; +\infty[$

**c)** (0,5 pt) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  puis montrer que  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $]0; +\infty[$

**3)** (1 pt) Construire la courbe  $(C)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

**4) a)** (0,5 pt) Montrer que  $u : x \mapsto \frac{x^3}{3} - x$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto x^2 - 1$  sur  $\mathbb{R}$

**b)** (1 pt) Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que :  $\int_1^2 (x^2 - 1) \ln x \, dx = \frac{2}{9}(1 + 3 \ln 2)$

**c)** (0,25 pt) Calculer, en  $\text{cm}^2$ , l'aire du domaine plan limité par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = 2$