

Examen national du baccalauréat

Session normale 2013

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales — Option PC & SVT Durée : 3 h — Coefficient : 7

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(-1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$ et $\Omega(1, 1, -1)$ et la sphère (S) de centre Ω et de rayon 3.

1) a) (1 pt) Montrer que $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et vérifier que $x + y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB)

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Vérifier que $d(\Omega, (OAB)) = \sqrt{3}$ puis montrer que le plan (OAB) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (OAB)

a) (0,5 pt) Démontrer que

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

est une représentation paramétrique de la droite (Δ) .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Déterminer le triplet de coordonnées du centre du cercle (Γ)

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A , B et C d'affixes respectives a , b et c tel que : $a = 7 + 2i$; $b = 4 + 8i$ et $c = -2 + 5i$

1) a) (0,75 pt) Vérifier que : $(1 + i)(-3 + 6i) = -9 + 3i$ et montrer que : $\frac{c - a}{b - a} = 1 + i$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) En déduire que : $AC = AB\sqrt{2}$ et donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) (0,75 pt) Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est : $d = 10 + 11i$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Calculer $\frac{d - c}{b - c}$ et en déduire que les points B , C et D sont alignés.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules blanches. On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

1) (1,5 pt) Soient les deux événements suivants : A : « Tirer deux boules rouges et deux boules vertes » B : « Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées » Montrer que $p(A) = \frac{1}{7}$ et que $p(B) = \frac{1}{3}$

► [Afficher / Masquer la solution](#)

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches tirées.

a) (0,25 pt) Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1 et 2.

► [Afficher / Masquer la solution](#)

b) (1,25 pt) Montrer que $p(X = 1) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

► [Afficher / Masquer la solution](#)

Exercice 4 : Suites numériques (3 points)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{25}{10 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

1) (1 pt) Vérifier que : $5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et montrer par récurrence que $5 - u_n > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

► Afficher / Masquer la solution

2) On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = \frac{5}{5 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a) (0,75 pt) Montrer que : $v_{n+1} = \frac{10 - u_n}{5 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et vérifier que $v_{n+1} - v_n = 1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Montrer que : $v_n = n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et en déduire que $u_n = 5 - \frac{5}{n}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,25 pt) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 5 : Étude de fonctions numériques et calcul intégral (8 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 2)^2 e^x$. et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a) (0,25 pt) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0,25 pt) Vérifier que : $f(x) = x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et interpréter ce résultat. (on rappelle que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$)

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (0,75 pt) Montrer que : $f'(x) = x(x-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Montrer que la fonction f est croissante sur chacun des deux intervalles $] -\infty, 0]$ et $[2, +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $[0, 2]$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

4) a) (1 pt) Montrer que : $f''(x) = (x^2 - 2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que la courbe (C) possède deux points d'inflexion qu'on ne demande pas de déterminer leurs ordonnées.

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Construire (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

► Afficher / Masquer la solution

5) a) (0,5 pt) Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x - 1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $\int_0^1 xe^x dx$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,75 pt) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ est égale à $5(e - 2) \text{ cm}^2$.

► Afficher / Masquer la solution

d) (0,5 pt) Utiliser la courbe pour donner le nombre de solution de l'équation : $x^2 = e^{-x} + 4x - 4$, $x \in \mathbb{R}$

► Afficher / Masquer la solution