

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2013

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales — Option PC & SVT Durée : 3 h — Coefficient : 7

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans L'espace rapporté d un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. les points $A(0, 0, 1)$, $B(1, 1, 1)$ et $C(2, 1, 2)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1, -1, 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

1) (0,75 pt) Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) et vérifier que le point A appartient à la sphère (S) .

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0,75 pt) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ et en déduire que $x - y - z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,75 pt) Calculer $d(\Omega, (ABC))$ puis en déduire que le plan (ABC) est tangent a la sphère (S) en A

► Afficher / Masquer la solution

3) Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

a) (0,25 pt) Démontrer que

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) En déduire les triplets des coordonnées des deux points d'intersections de la droite (Δ) et la sphère (S)

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

1) (0,75 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 8z + 25 = 0$

► Afficher / Masquer la solution

2) On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A , B et C d'affixes respectives a , b et c tels que : $a = 4 + 3i$, $b = 4 - 3i$ et $c = 10 + 3i$ et la translation T de vecteur $\overrightarrow{BC}$

a) (0,75 pt) Montrer que l'affixe du point D image du point A par la translation T est $d = 10 + 9i$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Vérifier que $\frac{b-a}{d-a} = -\frac{1}{2}(1+i)$ puis écrire le nombre complexe $-\frac{1}{2}(1+i)$ sous une forme trigonométrique

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Montrer que : $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) = \frac{5\pi}{4} [2\pi]$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) (0,5 pt) Vérifier que : $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0,5 pt) Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,25 pt) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

► Afficher / Masquer la solution

3) Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) (0,5 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et exprimer v_n en fonction de n

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,75 pt) En déduire que $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de la suite (u_n) .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 : Calcul des probabilités (3 points)

Un sac contient 9 jetons indiscernables au toucher : quatre jetons blancs, trois jetons noirs et deux jetons verts. On tire au hasard, simultanément, trois jetons du sac.

1) (1 pt) Soient les deux événements suivants A : « Tirer trois jetons de même couleur » B : « Tirer trois jetons de couleurs différentes deux à deux ». Montrer que $p(A) = \frac{5}{84}$ et que $p(B) = \frac{2}{7}$.

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de jetons noirs tirés.

a) (0,25 pt) Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1, 2 et 3.

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Montrer que $p(X = 2) = \frac{3}{14}$ et $p(X = 1) = \frac{15}{28}$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,75 pt) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 5 : Étude de fonctions numériques et calcul intégral (8 points)

Partie I

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - x - \ln x$

1) a) (0,25 pt) Vérifier que $2x^2 - x - 1 = (2x + 1)(x - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Montrer que $g'(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$ et en déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$ et qu'elle est croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

2) (0,5 pt) Montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$. (remarquer que $g(1) = 0$).

► Afficher / Masquer la solution

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité 1 cm).

1) a) (0,5 pt) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. (remarquer que $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$).

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,25 pt) En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (1 pt) Montrer que : $f'(x) = 2 \frac{x^2 - \ln x}{x}$ pour tout x de $]0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,75 pt) Vérifier que $\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$ et en déduire que la fonction f est croissante sur $]0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (0,5 pt) Montrer que $y = 2x - 2$ est une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point A(1, 0).

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Construire, dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C). (on admettra que A est le seul point d'inflexion de la courbe (C))

► Afficher / Masquer la solution

4) a) (0,75 pt) Vérifier que $H : x \mapsto x(\ln x - 1)$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0, +\infty[$ puis montrer que : $\int_1^e \ln x \, dx = 1$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est égale à $\frac{1}{3}(e^3 - 6e + 8) \text{ cm}^2$

► Afficher / Masquer la solution