

Examen national du baccalauréat

Session normale 2014

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales — Option PC & SVT Durée : 3 h — Coefficient : 7

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(0, 3, 1)$, $B(-1, 3, 0)$ et $C(0, 5, 0)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0$

1) a) (0,75 pt) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, et en déduire que les point A , B , et C ne sont pas alignés

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que $2x - y - 2z + 5 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0,5 pt) Montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(2, 0, 0)$ et son rayon est 3.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,75 pt) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Déterminer les coordonnées de H point de contact du plan (ABC) et la sphère (S)

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

1) (0,75 pt) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - z\sqrt{2} + 2 = 0$

► Afficher / Masquer la solution

2) On considère le nombre complexe : $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$

a) (0,5 pt) Montrer que le module du nombre u est 2, et que $\arg u \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,75 pt) En utilisant la forme trigonométrique du nombre u , montrer que u^6 est un nombre réel

► Afficher / Masquer la solution

3) On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les deux points A et B d'affixes respectives a et b tel que : $a = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $b = 8$ Soit z l'affixe d'un point M du plan, et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$

a) (0,5 pt) Exprimer z' en fonction de z

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R , et en déduire que le triangle OAB est équilatéral

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_0 = 13$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) (0,75 pt) Montrer, par récurrence, que $U_n < 14$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit (V_n) la suite numérique telle que ; $V_n = 14 - U_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) (1 pt) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puis exprimer V_n en fonction de n

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,75 pt) En déduire que $U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$, puis calculer la limite de la suite (U_n)

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $U_n > 13.99$

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 : Calcul des probabilités (3 points)

Un sac contient neuf jetons, indiscernables au toucher, et portants les nombres : 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1

1) (1 pt) On tire au hasard, simultanément, deux jetons du sac. Soit l'événement A : « La somme des nombres portés par les deux jetons tirés est égale à 1 » Montrer que $p(A) = \frac{5}{9}$

► Afficher / Masquer la solution

2) On considère le jeu suivant : Saïd tire au hasard, simultanément, deux jetons du sac, et il est considéré gagnant s'il tire deux jetons portant chacun le nombre 1

a) (1 pt) Montrer que la probabilité pour que Saïd gagne est $\frac{1}{6}$

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Saïd a joué le précédent jeu trois fois (Il remet à chaque fois les deux jetons tirés dans le sac) Quelle est la probabilité pour que Saïd gagne exactement deux fois

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 5 : Étude de fonctions numériques et calcul intégral (8 points)**Partie I**

Soit g la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln x$

1) (0,5 pt) Montrer que : $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ pour tout x de $]0; +\infty[$, et en déduire que la fonction g est croissante sur $]0; +\infty[$

► Afficher / Masquer la solution

2) (0,75 pt) Vérifier que $g(1) = 0$, puis en déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $]0; 1]$ et que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $[1; +\infty[$

► Afficher / Masquer la solution

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x^2}$ et soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1 cm)

1) (0,5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, et donner une interprétation géométrique du résultat

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0,25 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0$ (on pourra poser : $t = \sqrt{x}$), puis montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,25 pt) Déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (1,5 pt) Montrer que $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$ pour tout x de $]0; +\infty[$, puis en déduire que la fonction f est décroissante sur $]0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$, puis en déduire que $f(x) \geq 2$ pour tout x de $]0; +\infty[$

► Afficher / Masquer la solution

4) (0,75 pt) Construire (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (on admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion que l'on ne demande pas de déterminer)

► Afficher / Masquer la solution

5) On considère les deux intégrales suivantes : $I = \int_1^e (1 + \ln x) dx$ et $J = \int_1^e (1 + \ln x)^2 dx$

a) (0,5 pt) Montrer que $H : x \mapsto x \ln x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto 1 + \ln x$ sur $]0; +\infty[$ puis en déduire que $I = e$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que : $J = 2e - 1$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

► Afficher / Masquer la solution