

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2014

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales — Option PC & SVT Durée : 3 h — Coefficient : 7

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le point $A(0, 0, 1)$; le plan (P) d'équation $2x + y - 2z - 7 = 0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(0, 3, -2)$ et de rayon 3.

1) a) (0,5 pt) Montrer que

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point A et perpendiculaire au plan (P) .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Vérifier que $H(2, 1, -1)$ est le point d'intersection du plan (P) et la droite (Δ) .

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0,75 pt) Montrer que $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$ où $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que la distance du point Ω à la droite (Δ) est égale à 3.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,75 pt) En déduire que la droite (Δ) est tangente à la sphère (S) et vérifier que H est le point de contact de la droite (Δ) et la sphère (S)

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 5 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*.$$

1) (0,75 pt) Montrer par récurrence que $u_n > 2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

► Afficher / Masquer la solution

2) On considère la suite numérique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

a) (1 pt) Montrer que $v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est arithmétique de raison 1.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,75 pt) Exprimer v_n en fonction de n et en déduire que : $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Pour déterminer les deux questions d'un examen oral dans un concours de recrutement, le candidat tire au hasard, successivement et sans remise, deux cartes d'une urne contenant 10 cartes : huit cartes concernant les mathématiques et deux cartes concernant la langue française (on suppose que les cartes sont indiscernables au toucher).

1) (1,5 pt) On considère l'événement A : « Tirer deux cartes concernant la langue française » et l'événement B : « Tirer deux cartes concernant deux matières différentes » Montrer que $p(A) = \frac{1}{45}$ et que $p(B) = \frac{16}{45}$

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de cartes tirées concernant la langue française.

a) (0,25 pt) Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0, 1 et 2

► Afficher / Masquer la solution

b) (1,25 pt) Montrer que $p(X = 0) = \frac{28}{45}$ puis donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 : Nombres complexes (3 points)

1) (0,75 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

2) On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives : $a = 2 + i$, $b = 2 - i$, $c = i$, $d = -i$ et $\omega = 1$

a) (0,25 pt) Montrer que : $\frac{a - \omega}{b - \omega} = i$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) En déduire que le triangle ΩAB est rectangle et isocèle en Ω .

► Afficher / Masquer la solution

3) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) (0,5 pt) Montrer que : $z' = iz + 1 - i$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Vérifier que : $R(A) = C$ et $R(D) = B$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0,5 pt) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle dont on déterminera le centre.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 5 : Étude de fonctions numériques et calcul intégral (8 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (xe^x - 1)e^x$ Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm).

1) (0,75 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0,75 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (1 pt) Montrer que : $f'(x) = e^x(e^x - 1 + 2xe^x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis vérifier que $f'(0) = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,5 pt) Montrer que $e^x - 1 \geq 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$ et que $e^x - 1 \leq 0$ pour tout x de $] -\infty, 0]$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (1,25 pt) Montrer que la fonction f est croissante sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur $] -\infty, 0]$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

4) a) (0,75 pt) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0, +\infty[$ et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. (on admettra que $e^{1/2} < 2$)

► Afficher / Masquer la solution

b) (0,75 pt) Construire dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe (C) , (on admettra que la courbe (C) possède un seul point d'inflexion qu'on ne demande pas de déterminer).

► Afficher / Masquer la solution

5) (0,75 pt) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_0^{1/2} x e^{2x} dx = \frac{1}{4}.$$

► Afficher / Masquer la solution

6) (1 pt) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$.

► Afficher / Masquer la solution