Examen national du baccalauréat

Session normale 2016

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (option française) Code NS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

INSTRUCTIOS GENERALES

— L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
— Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
— L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	2,5 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude des fonctions numériques et calcul intégral	8,5 points

Exercice 1 : Suites numériques (2,5 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3+u_n}{5-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

1) *(0,75 pt)* Vérifier que $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ pour tout entier naturel n, puis montrer par récurrence que $u_n < 3$ pour tout entier naturel n

Correction

Vérification. Soit $n \in \mathbb{N}$ (on admet que $u_n \neq 5$, ce que confirme la récurrence ci-dessous puisque $u_n < 3$). On réduit au même dénominateur :

$$u_{n+1} - 3 = \frac{3+u_n}{5-u_n} - 3 = \frac{3+u_n-3(5-u_n)}{5-u_n} = \frac{3+u_n-15+3u_n}{5-u_n} = \frac{4u_n-12}{5-u_n}.$$

Or $4u_n - 12 = 4(u_n-3)$ et $5-u_n = 2+(3-u_n)$. Donc, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}.$$

Récurrence. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.
Initialisation. Pour $n = 0$: $u_0 = 2 < 3$. La propriété est vraie au rang 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n < 3$ et montrons que $u_{n+1} < 3$.
Comme $u_n < 3$, on a $u_n - 3 < 0$, donc $4(u_n-3) < 0$; et $3-u_n > 0$, donc $2+(3-u_n) > 2 > 0$.
Le quotient $\dfrac{4(u_n-3)}{2+(3-u_n)}$ est donc strictement négatif, c'est-à-dire $u_{n+1} - 3 < 0$, soit $u_{n+1} < 3$.
Conclusion. D'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n < 3$.

2) Soit la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3 - u_n}$ pour tout entier naturel n

a) *(0,75 pt)* Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$, puis en déduire que $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier naturel n

Correction

D'après la question 1), $u_n < 3$, donc $3 - u_n \neq 0$ et v_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule séparément le numérateur et le dénominateur de v_{n+1} :

$$u_{n+1} - 1 = \frac{3 + u_n - (5 - u_n)}{5 - u_n} = \frac{2u_n - 2}{5 - u_n} = \frac{2(u_n - 1)}{5 - u_n},$$

$$3 - u_{n+1} = \frac{3(5 - u_n) - (3 + u_n)}{5 - u_n} = \frac{12 - 4u_n}{5 - u_n} = \frac{4(3 - u_n)}{5 - u_n}.$$

Donc

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{3 - u_{n+1}} = \frac{2(u_n - 1)}{4(3 - u_n)} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n - 1}{3 - u_n} = \frac{1}{2} v_n.$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$, de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{3 - u_0} = \dfrac{2 - 1}{3 - 2} = 1$.

Par suite, pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times q^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

b) *(0,5 pt)* Montrer que $u_n = \dfrac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ pour tout entier naturel n, puis écrire u_n en fonction de n

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$. De $v_n = \dfrac{u_n - 1}{3 - u_n}$ on tire :

$$v_n(3 - u_n) = u_n - 1 \iff 3v_n - v_n u_n = u_n - 1 \iff 3v_n + 1 = u_n(1 + v_n).$$

Or $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$, donc $1 + v_n \neq 0$ et

$$u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}.$$

En remplaçant v_n par son expression :

$$u_n = \frac{1 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Contrôle : pour $n = 0$, $u_0 = \dfrac{1 + 3}{1 + 1} = 2$.

c) *(0,5 pt)* Déterminer la limite de la suite (u_n)

Correction

Comme $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.
Donc

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n} = \frac{1 + 3 \times 0}{1 + 0} = 1.$$

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2, 1, 3)$, $B(3, 1, 1)$, $C(2, 2, 1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

1) a) *(0,5 pt)* Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

Correction

On a $\overrightarrow{AB}(3-2,\ 1-1,\ 1-3)$, soit $\overrightarrow{AB}(1,0,-2)$, et $\overrightarrow{AC}(2-2,\ 2-1,\ 1-3)$, soit $\overrightarrow{AC}(0,1,-2)$.

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & -2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=(0+2)\vec{i}-(-2-0)\vec{j}+(1-0)\vec{k}$$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$.

b) *(0,5 pt)* En déduire que $2x+2y+z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

Correction

Le vecteur $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2,2,1)$ est non nul : les points A, B, C ne sont pas alignés et $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
Une équation de (ABC) est donc de la forme $2x+2y+z+d=0$. Comme $A(2,1,3)\in(ABC)$: $4+2+3+d=0$, donc $d=-9$.
Ainsi (ABC) : $2x+2y+z-9=0$.

2) a) *(0,5 pt)* Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(1,-1,0)$ et pour rayon 6

Correction

On complète les carrés :

$$x^2-2x=(x-1)^2-1 \qquad \text{et} \qquad y^2+2y=(y+1)^2-1.$$

L'équation de (S) s'écrit donc $(x-1)^2-1+(y+1)^2-1+z^2-34=0$, soit

$$(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=36=6^2.$$

Donc (S) est la sphère de centre $\Omega(1,-1,0)$ et de rayon $R=6$.

b) *(0,5 pt)* Montrer que $d(\Omega,(ABC))=3$ et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère suivant un cercle (Γ)

Correction

$$d(\Omega,(ABC))=\frac{|2\times1+2\times(-1)+0-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{|-9|}{\sqrt{9}}=\frac{9}{3}=3.$$

Comme $d(\Omega,(ABC))=3<6=R$, le plan (ABC) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ), de rayon

$$r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{36-9}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}.$$

3) a) *(0,5 pt)* Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC)

Correction

La droite (Δ) est orthogonale au plan (ABC), donc elle est dirigée par le vecteur normal $\vec{n}(2,2,1)$. Elle passe par $\Omega(1,-1,0)$, d'où :

$$(\Delta):\begin{cases}x=1+2t\\ y=-1+2t\\ z=t\end{cases}\qquad (t\in\mathbb{R}).$$

b) *(0,5 pt)* Montrer que le point est le centre du cercle (Γ)

Correction

(Le point visé par l'énoncé est le point B.)
Le centre du cercle (Γ) est le projeté orthogonal H de Ω sur le plan (ABC), c'est-à-dire le point d'intersection de (Δ) et de (ABC).
Soit $M(1+2t,\ -1+2t,\ t)$ un point de (Δ) :

$$M\in(ABC)\iff 2(1+2t)+2(-1+2t)+t-9=0\iff 9t-9=0\iff t=1.$$

Pour $t=1$ on obtient le point $(3,1,1)$, c'est-à-dire le point B.
Donc le centre du cercle (Γ) est le point $B(3,1,1)$.
Contrôle : $\Omega B=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3=d(\Omega,(ABC))$.

Exercice 3 : Nombres complexes (3 points)

1) *(0,75 pt)* Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 4z + 29 = 0$$

Correction

Le discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 29 = 16 - 116 = -100 = (10i)^2 < 0$.
L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{4 - 10i}{2} = 2 - 5i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{4 + 10i}{2} = 2 + 5i.$$

Donc $S = \{2 - 5i\,;\, 2 + 5i\}$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points Ω, A et B d'affixes respectives ω, a et b telles que $\omega = 2 + 5i$, $a = 5 + 2i$ et $b = 5 + 8i$

a) *(0,75 pt)* Soit u le nombre complexe tel que $u = b - \omega$

Vérifier que $u = 3 + 3i$ puis montrer que $\arg u \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$

Correction

$u = b - \omega = (5 + 8i) - (2 + 5i) = 3 + 3i$.
$|u| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, donc

$$u = 3\sqrt{2}\left(\frac{3}{3\sqrt{2}} + \frac{3}{3\sqrt{2}}i\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Donc $\arg u \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

b) *(0,25 pt)* Déterminer un argument du nombre complexe $\overline{u}$ ($\overline{u}$ étant le conjugué de u)

Correction

On sait que $\arg \overline{u} \equiv -\arg u\,[2\pi]$, donc $\arg \overline{u} \equiv -\dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$.
Un argument de $\overline{u}$ est $-\dfrac{\pi}{4}$ (en effet $\overline{u} = 3 - 3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$).

c) *(0,75 pt)* Vérifier que $a - \omega = \overline{u}$ puis en déduire que $\Omega A = \Omega B$ et que $\arg\left(\dfrac{b - \omega}{a - \omega}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$

Correction

$a - \omega = (5 + 2i) - (2 + 5i) = 3 - 3i = \overline{u}$.
Distances. $\Omega A = |a - \omega| = |\overline{u}| = |u|$ et $\Omega B = |b - \omega| = |u|$. Donc $\Omega A = \Omega B$ $(= 3\sqrt{2})$.
Argument.

$$\arg\left(\frac{b - \omega}{a - \omega}\right) \equiv \arg\left(\frac{u}{\overline{u}}\right) \equiv \arg u - \arg \overline{u} \equiv \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi].$$

Contrôle : $\dfrac{b - \omega}{a - \omega} = \dfrac{3 + 3i}{3 - 3i} = \dfrac{(3 + 3i)^2}{18} = \dfrac{18i}{18} = i$.

d) *(0,5 pt)* On considère la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image du point A par la rotation R

Correction

L'écriture complexe de R est $z' - \omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$, soit $z' - \omega = i(z - \omega)$.
D'après c), $\dfrac{b - \omega}{a - \omega} = i$, donc $b - \omega = i(a - \omega)$: l'image de A est le point d'affixe b.
Vérification directe : $\omega + i(a - \omega) = 2 + 5i + i(3 - 3i) = 2 + 5i + 3i + 3 = 5 + 8i = b$.
Donc $R(A) = B$.

Exercice 4 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes. (les boules sont indiscernables au toucher) On tire au hasard, simultanément, deux boules de l'urne.

1) *(1 pt)* Soit A l'événement : « Les deux boules tirées sont rouges »

Montrer que $p(A) = \dfrac{2}{15}$

Correction

Un tirage est une combinaison de 2 boules parmi 10 : $\text{card}(\Omega) = C_{10}^2 = \dfrac{10 \times 9}{2} = 45$, et les tirages sont équiprobables.
L'événement A correspond au choix de 2 boules parmi les 4 rouges : $\text{card}(A) = C_4^2 = 6$.
Donc $p(A) = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$.

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges Restantes dans l'urne après le tirage de deux boules.

a) *(0,5 pt)* Montrer que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{2, 3, 4\}$

Correction

Le nombre de boules rouges tirées est 0, 1 ou 2. Comme l'urne contient 4 boules rouges, le nombre de boules rouges restantes est $X = 4 -$ (nombre de rouges tirées) :

— aucune rouge tirée : $X = 4$;
— une rouge tirée : $X = 3$;
— deux rouges tirées : $X = 2$.

Donc $X(\Omega) = \{2, 3, 4\}$.

b) *(1,5 pt)* Montrer que $p(X = 3) = \dfrac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Correction

$(X = 3)$ signifie qu'on a tiré exactement une boule rouge et une boule verte :

$$p(X = 3) = \frac{C_4^1 \times C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{4 \times 6}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}.$$

$(X = 2)$ signifie qu'on a tiré deux rouges : $p(X = 2) = p(A) = \dfrac{2}{15}$.
$(X = 4)$ signifie qu'on a tiré deux vertes : $p(X = 4) = \dfrac{C_6^2}{C_{10}^2} = \dfrac{15}{45} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{15}$.

x_i	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{5}{15}$

Contrôle : $\dfrac{2 + 8 + 5}{15} = 1$.

Problème (8,5 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm)

A- 1) a) *(0,25 pt)* Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Correction

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x - 2) = -\infty$.
Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty + 0 - 0 = -\infty$.

b) *(0,5 pt)* Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

Correction

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - (2x-2) = e^{2x} - 4e^x$.
Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^{2x} - 4e^x\right) = 0 - 0 = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (2x-2)] = 0$: la droite $(D) : y = 2x - 2$ est asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

2) a) *(0,5 pt)* Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Correction

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^{2x} - 4e^x = e^x\left(e^x - 4\right)$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - 4) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^{2x} - 4e^x\right) = +\infty$.
Comme de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-2) = +\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) *(0,5 pt)* Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat

Correction

Pour $x > 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = 2 - \frac{2}{x} + \frac{e^x}{x}\left(e^x - 4\right).$$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - 4) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

Interprétation : puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3) a) *(0,5 pt)* Montrer que $f'(x) = 2\left(e^x - 1\right)^2$ pour tout réel x

Correction

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme de fonctions dérivables) et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2 + 2e^{2x} - 4e^x = 2\left(e^{2x} - 2e^x + 1\right) = 2\left(\left(e^x\right)^2 - 2e^x + 1\right) = 2\left(e^x - 1\right)^2.$$

b) *(0,25 pt)* Donner le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

(Remarquer que $f'(0) = 0$)

Correction

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\left(e^x - 1\right)^2 \geq 0$, et $f'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$.
La dérivée est positive et ne s'annule qu'en 0 : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $f(0) = 0 - 2 + 1 - 4 = -5$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

c) *(0,75 pt)* Montrer qu'il existe un réel unique α de l'intervalle $]1, \ln 4[$ tel que $f(\alpha) = 0$

Correction

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1, \ln 4]$. Calculons les valeurs aux bornes :

— $f(1) = 2 - 2 + e^2 - 4e = e(e-4) < 0$ car $e < 4$ ($f(1) \approx -3{,}48$) ;
— $f(\ln 4) = 2\ln 4 - 2 + e^{2\ln 4} - 4e^{\ln 4} = 2\ln 4 - 2 + 16 - 16 = 2\ln 4 - 2 = 2(\ln 4 - 1) > 0$ car $4 > e$ ($f(\ln 4) \approx 0{,}77$).

Donc $f(1) \times f(\ln 4) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires (fonction continue et strictement monotone), l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]1, \ln 4[$.

4) a) *(0,5 pt)* Montrer que la courbe (C_f) est située au dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ et en dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty, \ln 4[$

Correction

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) - (2x-2) = e^{2x} - 4e^x = e^x\,(e^x - 4)$.
Comme $e^x > 0$, le signe de $f(x) - (2x-2)$ est celui de $e^x - 4$, et $e^x - 4 > 0 \iff e^x > 4 \iff x > \ln 4$.

— Sur $]\ln 4, +\infty[$: $f(x) - (2x-2) > 0$, donc (C_f) est au-dessus de (D).
— Sur $]-\infty, \ln 4[$: $f(x) - (2x-2) < 0$, donc (C_f) est en dessous de (D).

(Les deux se coupent au point d'abscisse $\ln 4$.)

b) *(0,5 pt)* Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique de coordonnées $(0, -5)$

Correction

f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

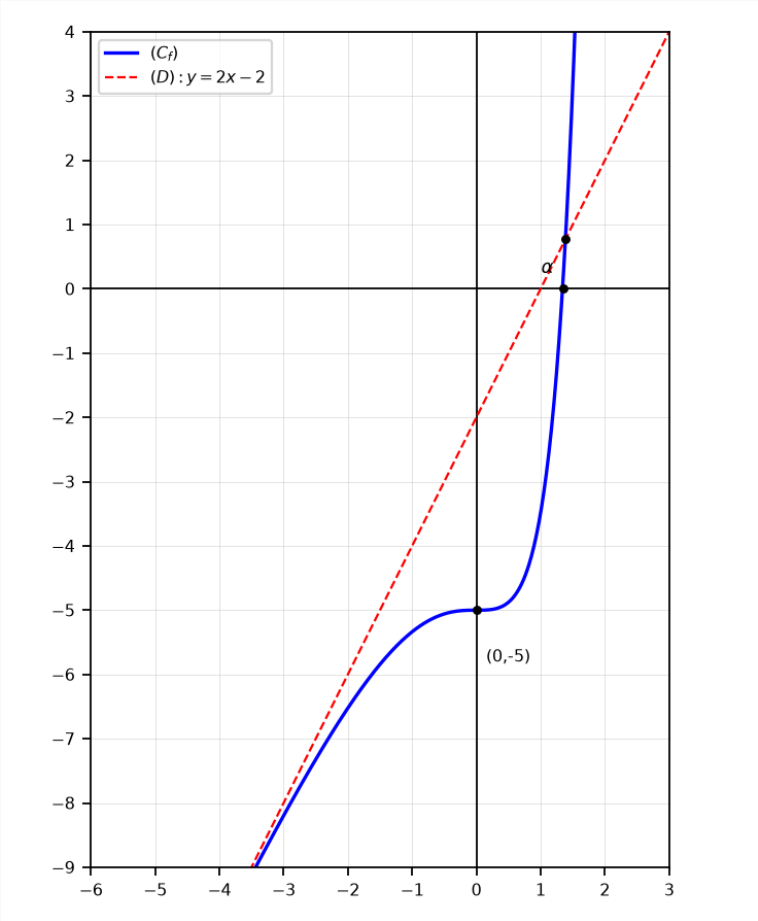
$$f''(x) = 2 \times 2e^x\,(e^x - 1) = 4e^x\,(e^x - 1)\,.$$

Comme $4e^x > 0$, $f''(x)$ a le signe de $e^x - 1$: $f''(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $f''(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$.
f'' s'annule en 0 en changeant de signe, et seulement en 0 : la courbe (C_f) admet un unique point d'inflexion, d'abscisse 0 et d'ordonnée $f(0) = -5$, c'est-à-dire le point $(0, -5)$.

c) *(0,75 pt)* Construire la droite (D) et la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Correction

Éléments utiles : (D) asymptote en $-\infty$; (C_f) coupe (D) au point $(\ln 4,\ 2\ln 4 - 2) \approx (1{,}39\,;\,0{,}77)$; point d'inflexion $(0, -5)$ avec tangente horizontale $(f'(0) = 0)$; $\alpha \approx 1{,}36$; branche parabolique verticale en $+\infty$.



5) a) *(0,5 pt)* Montrer que $\displaystyle\int_0^{\ln 4} \left(e^{2x} - 4e^x\right) dx = -\frac{9}{2}$

Correction

Une primitive de $x \mapsto e^{2x} - 4e^x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{2x} - 4e^x$. Donc

$$\int_0^{\ln 4} \left(e^{2x} - 4e^x\right) dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 4e^x\right]_0^{\ln 4} = \left(\frac{16}{2} - 16\right) - \left(\frac{1}{2} - 4\right) = -8 + \frac{7}{2} = -\frac{9}{2}.$$

b) *(0,5 pt)* Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$

Correction

D'après 4) a), sur $[0, \ln 4]$ la courbe (C_f) est en dessous de (D) : $|f(x) - (2x-2)| = -\left(e^{2x} - 4e^x\right)$. L'unité étant 1 cm, l'unité d'aire est 1 cm^2 :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 4} [(2x-2) - f(x)]\, dx \times 1 \text{ cm}^2 = -\int_0^{\ln 4} \left(e^{2x} - 4e^x\right) dx \times 1 \text{ cm}^2 = \frac{9}{2} \text{ cm}^2.$$

B-1) a) *(0,5 pt)* Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$

Correction

L'équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$; elle admet deux racines réelles distinctes $r_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $r_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$.
Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$y(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

b) *(0,5 pt)* Déterminer la solution g de l'équation différentielle (E) vérifiant $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$

Correction

$g(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x}$ et $g'(x) = \alpha e^x + 2\beta e^{2x}$. Les conditions donnent :

$$\begin{cases} g(0) = \alpha + \beta = -3 \\ g'(0) = \alpha + 2\beta = -2 \end{cases}$$

Par soustraction : $\beta = 1$, puis $\alpha = -3 - 1 = -4$.
Donc $g(x) = e^{2x} - 4e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Soit la fonction numérique h définie sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln\left(e^{2x} - 4e^x\right)$$

a) *(0,75 pt)* Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$

Correction

Pour $x > \ln 4$: $e^{2x} - 4e^x = e^x\left(e^x - 4\right) > 0$, donc h est bien définie et dérivable sur $I =]\ln 4, +\infty[$, avec

$$h'(x) = \frac{2e^{2x} - 4e^x}{e^{2x} - 4e^x} = \frac{2e^x\left(e^x - 2\right)}{e^x\left(e^x - 4\right)} = \frac{2\left(e^x - 2\right)}{e^x - 4}.$$

Sur I : $e^x > 4$, donc $e^x - 2 > 0$ et $e^x - 4 > 0$, d'où $h'(x) > 0$. La fonction h est continue et strictement croissante sur I : elle admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $J = h(I)$.
Limites : quand $x \to \ln 4^+$, $e^{2x} - 4e^x \to 0^+$, donc $h(x) \to -\infty$; quand $x \to +\infty$, $e^{2x} - 4e^x \to +\infty$, donc $h(x) \to +\infty$.
Donc $J = h(I) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$: h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$.

b) *(0,75 pt)* Vérifier que $h(\ln 5) = \ln 5$ puis déterminer $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)$

Correction

$\ln 5 \in I$ car $5 > 4$, et $h(\ln 5) = \ln\left(e^{2\ln 5} - 4e^{\ln 5}\right) = \ln(25 - 20) = \ln 5$.
h est dérivable en $\ln 5$ avec $h'(\ln 5) = \dfrac{2(5-2)}{5-4} = 6 \neq 0$, donc h^{-1} est dérivable en $h(\ln 5) = \ln 5$ et

$$\left(h^{-1}\right)'(\ln 5) = \frac{1}{h'\left(h^{-1}(\ln 5)\right)} = \frac{1}{h'(\ln 5)} = \frac{1}{6}.$$

FIN