

Examen national du baccalauréat

Session normale 2016

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (option française) Code NS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

INSTRUCTIOS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	2,5 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude des fonctions numériques et calcul intégral	8,5 points

Exercice 1 : Suites numériques (2,5 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{5 - u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n$$

1) (0,75 pt) Vérifier que $u_{n+1} - 3 = \frac{4(u_n - 3)}{2 + (3 - u_n)}$ pour tout entier naturel n , puis montrer par récurrence que $u_n < 3$ pour tout entier naturel n

2) Soit la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$ pour tout entier naturel n

a) (0,75 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, puis en déduire que $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier naturel n

b) (0,5 pt) Montrer que $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 + v_n}$ pour tout entier naturel n , puis écrire u_n en fonction de n

c) (0,5 pt) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(2, 1, 3)$, $B(3, 1, 1)$, $C(2, 2, 1)$ et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 34 = 0$$

- 1) a) (0,5 pt) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$
- b) (0,5 pt) En déduire que $2x + 2y + z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)
- 2) a) (0,5 pt) Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(1, -1, 0)$ et pour rayon 6
- b) (0,5 pt) Montrer que $d(\Omega, (ABC)) = 3$ et en déduire que le plan (ABC) coupe la sphère suivant un cercle (Γ)
- 3) a) (0,5 pt) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC)
- b) (0,5 pt) Montrer que le point est le centre du cercle (Γ)

Exercice 3 : Nombres complexes (3 points)

- 1) (0,75 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 - 4z + 29 = 0$$

- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points Ω , A et B d'affixes respectives ω , a et b telles que $\omega = 2 + 5i$, $a = 5 + 2i$ et $b = 5 + 8i$

- a) (0,75 pt) Soit u le nombre complexe tel que $u = b - \omega$
Vérifier que $u = 3 + 3i$ puis montrer que $\arg u \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$
- b) (0,25 pt) Déterminer un argument du nombre complexe $\bar{u}$ ($\bar{u}$ étant le conjugué de u)
- c) (0,75 pt) Vérifier que $a - \omega = \bar{u}$ puis en déduire que $\Omega A = \Omega B$ et que $\arg \left(\frac{b - \omega}{a - \omega} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
- d) (0,5 pt) On considère la rotation R de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer l'image du point A par la rotation R

Exercice 4 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient 10 boules : quatre boules rouges et six boules vertes. (les boules sont indiscernables au toucher)
On tire au hasard, simultanément, deux boules de l'urne.

- 1) (1 pt) Soit A l'événement : « Les deux boules tirées sont rouges »

Montrer que $p(A) = \frac{2}{15}$

- 2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges Restantes dans l'urne après le tirage de deux boules.

- a) (0,5 pt) Montrer que l'ensemble des valeurs prises par X est $\{2, 3, 4\}$
- b) (1,5 pt) Montrer que $p(X = 3) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Problème (8,5 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^x$$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm)

A- 1) a) (0,25 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b) (0,5 pt) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

2) a) (0,5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

b) (0,5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ puis interpréter géométriquement ce résultat

3) a) (0,5 pt) Montrer que $f'(x) = 2(e^x - 1)^2$ pour tout réel x

b) (0,25 pt) Donner le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

(Remarquer que $f'(0) = 0$)

c) (0,75 pt) Montrer qu'il existe un réel unique α de l'intervalle $]1, \ln 4[$ tel que $f(\alpha) = 0$

4) a) (0,5 pt) Montrer que la courbe (C_f) est située au dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ et en dessous de la droite (D) sur l'intervalle $] -\infty, \ln 4[$

b) (0,5 pt) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique de coordonnées $(0, -5)$

c) (0,75 pt) Construire la droite (D) et la courbe (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

5) a) (0,5 pt) Montrer que $\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^x) dx = -\frac{9}{2}$

b) (0,5 pt) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f) , la droite (D) , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$

B-1) a) (0,5 pt) Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$

b) (0,5 pt) Déterminer la solution g de l'équation différentielle (E) vérifiant $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$

2) Soit la fonction numérique h définie sur l'intervalle $]\ln 4, +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^x)$$

a) (0,75 pt) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} et que h^{-1} est définie sur $\mathbb{R}$

b) (0,75 pt) Vérifier que $h(\ln 5) = \ln 5$ puis déterminer $(h^{-1})'(\ln 5)$

FIN