Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2016

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales — Parcours : Sciences de la Vie et de la Terre et Sciences Physiques (option française) Code RS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

INSTRUCTIOS GENERALES

- Nombre de pages : 4 (la première page contient les instructions générales et les composantes Du sujet ; les trois autres pages contiennent le sujet de l'examen)
- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter
- Certaines notations sont utilisées dans différents exercices, toute fois chaque notation ne concerne Que l'exercice où elle est utilisée et ne dépend ni des exercices précédents ni des exercices suivants

COMPOSANTES DU DUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivants les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique Et calcul intégral	8 points

- Concernant le problème, ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) a) *(0,5 pt)* Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Correction

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
Initialisation. Pour $n = 0$: $u_0 = 2 > 1$. La propriété est vraie au rang 0.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 1$ et montrons que $u_{n+1} > 1$.
De $u_n > 1$ on déduit $\frac{1}{16}u_n > \frac{1}{16}$, puis $\frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} > \frac{1}{16} + \frac{15}{16} = 1$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 1$.
Conclusion. D'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 1$.

b) *(0,5 pt)* Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \frac{15}{16}(u_n - 1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Correction

Attention : l'égalité de l'énoncé est imprimée sans le signe « − » ; l'égalité exacte est $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$ *(avec le signe de l'énoncé, la suite serait croissante, ce qui contredit la conclusion demandée).*

Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - u_n = -\frac{15}{16}u_n + \frac{15}{16} = -\frac{15}{16}(u_n - 1).$$
D'après 1) a), $u_n > 1$, donc $u_n - 1 > 0$ et $-\frac{15}{16}(u_n - 1) < 0$.
Ainsi $u_{n+1} - u_n < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: la suite (u_n) est (strictement) décroissante.

c) *(0,25 pt)* En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Correction

La suite (u_n) est décroissante (question 1) b)) et minorée par 1 (question 1) a)). Toute suite décroissante et minorée est convergente : la suite (u_n) est donc convergente.

2) Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) *(1 pt)* Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{16}$ puis écrire v_n en fonction de n.

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - 1 = \frac{1}{16}u_n - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}(u_n - 1) = \frac{1}{16}v_n.$$
Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{16}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 1$.
Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0\, q^n = \left(\frac{1}{16}\right)^n$.

b) *(0,75 pt)* Montrer que $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis déterminer la limite de la suite (u_n).

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = v_n + 1 = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$.
Comme $-1 < \frac{1}{16} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{16}\right)^n = 0$, donc
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 3, 4)$ et $B(0, 1, 2)$.

1) a) *(0,5 pt)* Montrer que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

Correction

$\overrightarrow{OA}(1, 3, 4)$ et $\overrightarrow{OB}(0, 1, 2)$, donc
$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = (6-4)\vec{i} - (2-0)\vec{j} + (1-0)\vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

b) *(0,5 pt)* Montrer que $2x - 2y + z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

Correction

$\vec{n} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}(2, -2, 1)$ est non nul : les points O, A, B ne sont pas alignés et $\vec{n}$ est normal au plan (OAB).
Une équation de (OAB) est de la forme $2x - 2y + z + d = 0$; comme $O(0, 0, 0) \in (OAB)$, $d = 0$.
Donc $(OAB) : 2x - 2y + z = 0$. *(Contrôle : A : $2 - 6 + 4 = 0$; B : $0 - 2 + 2 = 0$.)*

2) *(0,5 pt)* Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 6z + 2 = 0$.

Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(3, -3, 3)$ et pour rayon 5.

Correction

On complète les carrés : $x^2 - 6x = (x-3)^2 - 9$, $y^2 + 6y = (y+3)^2 - 9$, $z^2 - 6z = (z-3)^2 - 9$.
L'équation de (S) s'écrit donc $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 - 27 + 2 = 0$, soit
$$(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 25 = 5^2.$$

Donc (S) a pour centre $\Omega(3,-3,3)$ et pour rayon $R=5$.

3) a) *(0,75 pt)* Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S).

Correction

$$d(\Omega,(OAB)) = \frac{|2\times 3 - 2\times(-3)+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{|6+6+3|}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Comme $d(\Omega,(OAB)) = 5 = R$, le plan (OAB) est tangent à la sphère (S).

b) *(0,75 pt)* Déterminer les coordonnées du point de contact H du plan (OAB) et de la sphère (S).

Correction

Le point de contact H est le projeté orthogonal de Ω sur (OAB) : c'est l'intersection de (OAB) avec la droite (Δ) passant par Ω et dirigée par $\vec{n}(2,-2,1)$:

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 3+2t \\ y = -3-2t \\ z = 3+t \end{cases} \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

$$M\in(OAB) \iff 2(3+2t)-2(-3-2t)+(3+t)=0 \iff 15+9t=0 \iff t=-\frac{5}{3}.$$

Donc $H\left(3-\frac{10}{3}, -3+\frac{10}{3}, 3-\frac{5}{3}\right)$, soit

$$H\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right).$$

Contrôle : $2\times\left(-\frac{1}{3}\right) - 2\times\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 0$ et $\Omega H = \frac{5}{3}\times 3 = 5$.

Exercice 3 : Nombres complexes (3 points)

1) *(0,75 pt)* Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-8z+41=0$.

Correction

Le discriminant est $\Delta = (-8)^2 - 4\times 41 = 64-164 = -100 = (10i)^2 < 0$.
Les solutions sont $z_1 = \dfrac{8-10i}{2} = 4-5i$ et $z_2 = \dfrac{8+10i}{2} = 4+5i$.
Donc $S = \{4-5i\,;\,4+5i\}$.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives a, b, c et ω telles que $a=4+5i$, $b=3+4i$, $c=6+7i$ Et $\omega = 4+7i$

a) *(0,75 pt)* Calculer $\dfrac{c-b}{a-b}$ puis en déduire que les points A, B et C sont alignés.

Correction

$c-b = (6+7i)-(3+4i) = 3+3i$ et $a-b = (4+5i)-(3+4i) = 1+i$. Donc

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{3+3i}{1+i} = \frac{3(1+i)}{1+i} = 3.$$

Le quotient $\dfrac{c-b}{a-b}$ est un réel, donc les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires ($\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BA}$) : les points A, B et C sont alignés.

b) *(0,75 pt)* Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Montrer que : $z' = -iz - 3 + 11i$.

Correction

L'écriture complexe de la rotation R de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ est

$$z'-\omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-\omega) = -i(z-\omega).$$

Donc $z' = -iz + i\omega + \omega = -iz + (1+i)(4+7i)$.
Or $(1+i)(4+7i) = 4 + 7i + 4i + 7i^2 = 4 - 7 + 11i = -3 + 11i$.
Ainsi $z' = -iz - 3 + 11i$.

c) *(0,75 pt)* Déterminer l'image du point C par la rotation R puis donner une forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{a-\omega}{c-\omega}$.

Correction

L'affixe de l'image de C est

$$-ic - 3 + 11i = -i(6+7i) - 3 + 11i = -6i + 7 - 3 + 11i = 4 + 5i = a.$$

Donc $R(C) = A$.
Par conséquent $a - \omega = -i(c - \omega)$, et comme $c \neq \omega$:

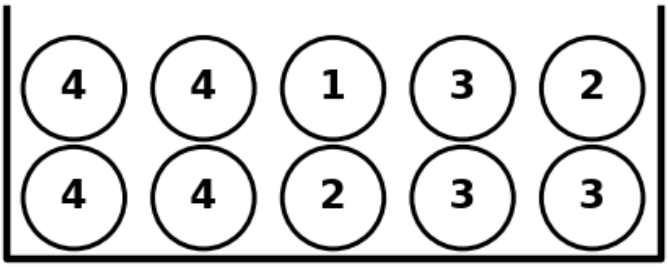
$$\frac{a-\omega}{c-\omega} = -i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Contrôle : $\dfrac{a-\omega}{c-\omega} = \dfrac{-2i}{2} = -i$.

Exercice 4 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient 10 boules portant les nombres : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 (les boules sont indiscernables au toucher).

On considère l'expérience suivante : On tire au hasard Successivement et sans remise deux boules de l'urne.



1) *(1 pt)* Soit A l'événement : « Obtenir deux boules portant deux nombres pairs »

Montrer que $p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{3}$.

Correction

Un tirage est un arrangement de 2 boules parmi 10 : $\mathrm{card}(\Omega) = A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$, tirages équiprobables.
Les boules portant un nombre pair sont les deux boules « 2 » et les quatre boules « 4 », soit 6 boules. Donc $\mathrm{card}(\mathrm{A}) = A_6^2 = 6 \times 5 = 30$ et

$$p(\mathrm{A}) = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}.$$

2) *(2 pt)* On répète l'expérience précédente trois fois de suite, en remettant dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement est réalisé.

Montrer que $p(\mathrm{X} = 1) = \dfrac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Correction

On répète 3 fois, de façon indépendante (les boules sont remises), la même épreuve, et l'événement A a la probabilité

$p = \dfrac{1}{3}$ à chaque épreuve. La variable X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{3}$:

$$p(\mathrm{X} = k) = C_3^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{3-k}, \qquad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

En particulier

$$p(\mathrm{X} = 1) = C_3^1 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9}.$$

De même : $p(\mathrm{X} = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$, $p(\mathrm{X} = 2) = 3 \times \dfrac{1}{9} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{27} = \dfrac{2}{9}$, $p(\mathrm{X} = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{1}{27}$.

x_i	0	1	2	3
$p(\mathrm{X} = x_i)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

Contrôle : $\dfrac{8 + 12 + 6 + 1}{27} = 1$.

Problème (8 points)

I – Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{2}{x} - 1 + 2\ln x$

On considère ci-contre le tableau de variations de la fonction g sur $]0, +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

1) *(0,25 pt)* Calculer $g(1)$.

Correction

$g(1) = \dfrac{2}{1} - 1 + 2\ln 1 = 2 - 1 + 0 = 1.$

2) *(0,75 pt)* En déduire à partir du tableau que $g(x) > 0$ Pour tout x de $]0, +\infty[$.

Correction

D'après le tableau, g est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$: elle admet en 1 un minimum absolu, égal à $g(1) = 1$.
Donc pour tout $x \in]0, +\infty[$: $g(x) \geq g(1) = 1 > 0$.

II – On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 3 - 3x + 2(x + 1)\ln x$.

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1) *(0,75 pt)* Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat.

Correction

On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} 2(x + 1) = 2$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} 2(x + 1)\ln x = -\infty$; de plus $\lim\limits_{x \to 0^+} (3 - 3x) = 3$.
Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.
Interprétation : la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe (C_f).

2) a) *(0,5 pt)* Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (Pour le calcul de la limite on pourra utiliser l'écriture suivante : $f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]$).

Correction

Pour $x > 0$: $f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]$.
Quand $x \to +\infty$: $\frac{3}{x} \to 0$, $2\left(1+\frac{1}{x}\right) \to 2$ et $\ln x \to +\infty$, donc le crochet tend vers $+\infty$.
Comme $x \to +\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) *(0,5 pt)* Montrer que la courbe (C_f) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont la direction est celle de l'axe des ordonnées.

Correction

Pour $x > 0$: $\frac{f(x)}{x} = \frac{3}{x} - 3 + 2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x$, et d'après le calcul précédent $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3) a) *(0,75 pt)* Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout de $]0, +\infty[$.

Correction

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = -3 + 2\ln x + 2(x+1) \times \frac{1}{x} = -3 + 2\ln x + 2 + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} - 1 + 2\ln x = g(x).$$

b) *(0,75 pt)* En déduire que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et dresser son tableau de variations sur $]0, +\infty[$.

Correction

D'après la partie I, $f'(x) = g(x) > 0$ pour tout $x > 0$: f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) *(0,5 pt)* Montrer que $\mathrm{I}(1, 0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

Correction

$f''(x) = g'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{2(x-1)}{x^2}$ pour tout $x > 0$.
$f''(x) < 0$ sur $]0, 1[$ et $f''(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$: f'' s'annule en 1 en changeant de signe.
Comme $f(1) = 3 - 3 + 2 \times 2 \times \ln 1 = 0$, le point $\mathrm{I}(1, 0)$ est un point d'inflexion de (C_f).

b) *(0,25 pt)* Montrer que $y = x - 1$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point I.

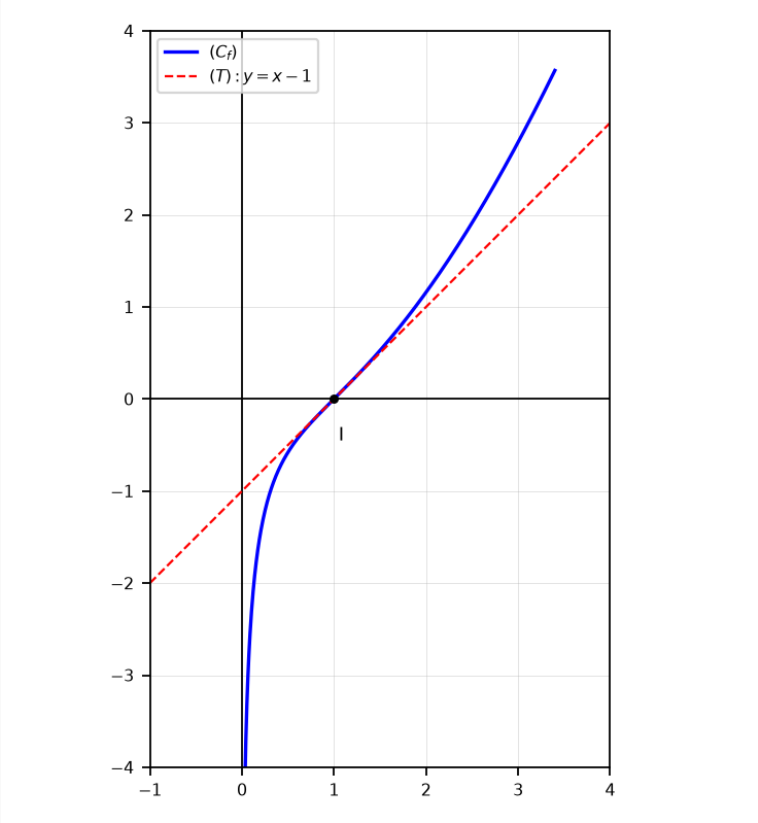
Correction

La tangente en $\mathrm{I}(1, 0)$ a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, avec $f'(1) = g(1) = 1$ et $f(1) = 0$.
Donc $(T) : y = x - 1$.

c) *(0,75 pt)* Construire dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C_f).

Correction

Éléments utiles : asymptote verticale $x = 0$; point d'inflexion $\mathrm{I}(1, 0)$ où (C_f) traverse sa tangente (T) ; branche parabolique verticale en $+\infty$; $f(2) = 6\ln 2 - 3 \approx 1{,}16$, $f(3) = 8\ln 3 - 6 \approx 2{,}79$.



5) a) *(0,5 pt)* Montrer que $\displaystyle\int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right) dx = \frac{7}{4}$.

Correction

$$\int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right) dx = \left[x+\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = (2+1) - \left(1+\frac{1}{4}\right) = 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}.$$

b) *(0,75 pt)* A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_1^2 (x+1)\ln x\, dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$.

Correction

On pose $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x+1$; alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{2} + x$. Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[1,2]$, donc

$$\int_1^2 (x+1)\ln x\, dx = \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{1}{x}\, dx = 4\ln 2 - 0 - \int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right) dx.$$

D'après 5) a) : $\displaystyle\int_1^2 (x+1)\ln x\, dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$.

c) *(0,5 pt)* Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Correction

f est strictement croissante et $f(1) = 0$, donc $f(x) \geq 0$ sur $[1,2]$. L'unité étant 2 cm, l'unité d'aire vaut $2 \times 2 = 4$ cm^2 :

$$\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)\, dx \times 4 \text{ cm}^2.$$

Or

$$\int_1^2 f(x)\, dx = \int_1^2 (3-3x)\, dx + 2\int_1^2 (x+1)\ln x\, dx = \left[3x - \frac{3x^2}{2}\right]_1^2 + 2\left(4\ln 2 - \frac{7}{4}\right) = -\frac{3}{2} + 8\ln 2 - \frac{7}{2} = 8\ln 2 - 5.$$

Donc $\mathcal{A} = 4(8\ln 2 - 5)$ cm^2 $= (32\ln 2 - 20)$ cm^2 $\approx 2{,}18$ cm^2.

6) *(0,5 pt)* Résoudre graphiquement l'inéquation : $x \in]0, +\infty[\,;\ (x+1)\ln x \geq \dfrac{3}{2}(x-1)$

Correction

Pour $x > 0$:

$$(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1) \iff 2(x+1)\ln x \geq 3x-3 \iff 3-3x+2(x+1)\ln x \geq 0 \iff f(x) \geq 0.$$

Graphiquement, (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses (ou le coupe) exactement pour $x \geq 1$ (point $\mathrm{I}(1,0)$).
Donc l'ensemble des solutions est $S = [1, +\infty[$.

FIN