Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2016

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales — Parcours : Sciences de la Vie et de la Terre et Sciences Physiques (option française) Code RS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

INSTRUCTIOS GENERALES

- Nombre de pages : 4 (la première page contient les instructions générales et les composantes Du sujet ; les trois autres pages contiennent le sujet de l'examen)
- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter
- Certaines notations sont utilisées dans différents exercices, toute fois chaque notation ne concerne Que l'exercice où elle est utilisée et ne dépend ni des exercices précédents ni des exercices suivants

COMPOSANTES DU DUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivants les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude d'une fonction numérique Et calcul intégral	8 points

- Concernant le problème, ln désigne la fonction logarithme népérien.

Exercice 1 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) a) *(0,5 pt)* Montrer par récurrence que $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

▶ **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,5 pt)* Vérifier que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{15}{16}(u_n - 1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis montrer que la suite (u_n) est décroissante.

► **Afficher / Masquer la solution**

c) *(0,25 pt)* En déduire que la suite (u_n) est convergente.

► **Afficher / Masquer la solution**

2) Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) *(1 pt)* Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{16}$ puis écrire v_n en fonction de n.

► **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,75 pt)* Montrer que $u_n = 1 + \left(\dfrac{1}{16}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis déterminer la limite de la suite (u_n).

► **Afficher / Masquer la solution**

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 3, 4)$ et $B(0, 1, 2)$.

1) a) *(0,5 pt)* Montrer que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

► **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,5 pt)* Montrer que $2x - 2y + z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB).

▶ **Afficher / Masquer la solution**

2) *(0,5 pt)* Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 6z + 2 = 0$.

Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(3, -3, 3)$ et pour rayon 5.

▶ **Afficher / Masquer la solution**

3) a) *(0,75 pt)* Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S).

▶ **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,75 pt)* Déterminer les coordonnées du point de contact H du plan (OAB) et de la sphère (S).

▶ **Afficher / Masquer la solution**

Exercice 3 : Nombres complexes (3 points)

1) *(0,75 pt)* Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 8z + 41 = 0$.

▶ **Afficher / Masquer la solution**

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et Ω d'affixes respectives a, b, c et ω telles que $a = 4 + 5i$, $b = 3 + 4i$, $c = 6 + 7i$ Et $\omega = 4 + 7i$

a) *(0,75 pt)* Calculer $\dfrac{c-b}{a-b}$ puis en déduire que les points A, B et C sont alignés.

▶ **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,75 pt)* Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de de centre Ω et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

Montrer que : $z' = -iz - 3 + 11i$.

▶ **Afficher / Masquer la solution**

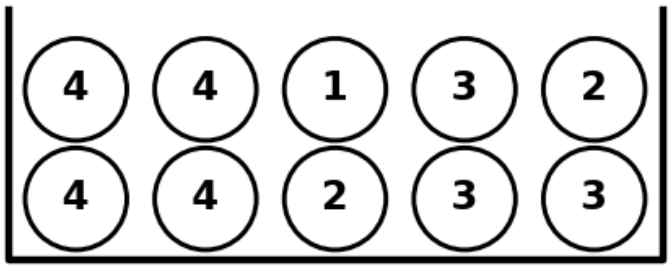
c) *(0,75 pt)* Déterminer l'image du point C par la rotation R puis donner une forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{a-\omega}{c-\omega}$.

▶ **Afficher / Masquer la solution**

Exercice 4 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient 10 boules portant les nombres : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3 ; 4 ; 4 ; 4 ; 4 (les boules sont indiscernables au toucher).

On considère l'expérience suivante : On tire au hasard Successivement et sans remise deux boules de l'urne.



1) *(1 pt)* Soit A l'événement : « Obtenir deux boules portant deux nombres pairs »

Montrer que $p(\mathrm{A}) = \dfrac{1}{3}$.

► **Afficher / Masquer la solution**

2) *(2 pt)* On répète l'expérience précédente trois fois de suite, en remettant dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement est réalisé.

Montrer que $p(\mathrm{X} = 1) = \dfrac{4}{9}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

► **Afficher / Masquer la solution**

Problème (8 points)

I – Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{2}{x} - 1 + 2\ln x$

On considère ci-contre le tableau de variations de la fonction g sur $]0, +\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖ $+\infty$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

1) *(0,25 pt)* Calculer $g(1)$.

► **Afficher / Masquer la solution**

2) *(0,75 pt)* En déduire à partir du tableau que $g(x) > 0$ Pour tout x de $]0, +\infty[$.

► **Afficher / Masquer la solution**

II – On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x$.

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1) *(0,75 pt)* Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ et interpréter géométriquement ce résultat.

► **Afficher / Masquer la solution**

2) a) *(0,5 pt)* Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (Pour le calcul de la limite on pourra utiliser l'écriture suivante : $f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln x\right]$).

► **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,5 pt)* Montrer que la courbe (C_f) admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont la direction est celle de l'axe des ordonnées.

► **Afficher / Masquer la solution**

3) a) *(0,75 pt)* Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout de $]0, +\infty[$.

► **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,75 pt)* En déduire que f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et dresser son tableau de variations sur $]0,+\infty[$.

► **Afficher / Masquer la solution**

4) a) *(0,5 pt)* Montrer que $\mathrm{I}(1,0)$ est un point d'inflexion de la courbe (C_f).

► **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,25 pt)* Montrer que $y = x - 1$ est une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point I.

► **Afficher / Masquer la solution**

c) *(0,75 pt)* Construire dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, la droite (T) et la courbe (C_f).

► **Afficher / Masquer la solution**

5) a) *(0,5 pt)* Montrer que $\displaystyle\int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right) dx = \frac{7}{4}$.

► **Afficher / Masquer la solution**

b) *(0,75 pt)* A l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\displaystyle\int_1^2 (x+1)\ln x\, dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$.

► **Afficher / Masquer la solution**

c) *(0,5 pt)* Calculer, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

► **Afficher / Masquer la solution**

6) *(0,5 pt)* Résoudre graphiquement l'inéquation : $x \in]0, +\infty[\,;\ (x+1)\ln x \geq \dfrac{3}{2}(x-1)$

► **Afficher / Masquer la solution**

FIN