

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2017

Mathématiques – 2BAC PC SVT (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code RS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

INSTRUCTIOS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU DUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivants les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Calcul des probabilités	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3 points
Exercice 4	Suites numériques	2,5 points
Problème	Etude d'une fonction numérique et calcul intégral	8,5 points

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ et le plan (P) d'équation $y - z = 0$.

1) a) (0.5 pt) Montrer que la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(1, 1, 1)$ et pour rayon 2.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Calculer $d(\Omega, (P))$ et en déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) .

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.5 pt) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) .

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1, -2, 2)$ et orthogonale au plan (P) .

a) (0.25 pt) Montrer que $\vec{u}(0, 1, -1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Montrer que $\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{2} \|\vec{u}\|$ et en déduire que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.5 pt) Déterminer les coordonnées de chaque point d'intersection de la droite (Δ) et de la sphère (S) .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules vertes.

On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

1) (1.5 pt) Soit A l'événement : « Parmi les quatre boules tirées, une seule boule est verte » et B l'événement : « Parmi les quatre boules tirées, il y a exactement trois boules de même couleur »

Montrer que $p(A) = \frac{8}{15}$ et $p(B) = \frac{19}{70}$.

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

a) (0.5 pt) Montrer que $p(X = 2) = \frac{2}{15}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (1 pt) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et montrer que l'espérance mathématique $E(X)$ est égale à $\frac{4}{5}$.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Nombres complexes (3 points)

1) (0.75 pt) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 + 4z + 8 = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives a , b et c telles que $a = -2 + 2i$, $b = 4 - 4i$ et $c = 4 + 8i$.

a) (0.5 pt) Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' , image de M par la rotation R de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Montrer que $z' = -iz - 4$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC .

► Afficher / Masquer la solution

3) Soit ω l'affixe du point Ω , milieu du segment $[BC]$.

a) (0.5 pt) Montrer que $|c - \omega| = 6$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - \omega| = 6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 4 : Suites numériques (2,5 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 17$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 12$ pour tout entier naturel n .

1) a) (0.5 pt) Montrer par récurrence que $u_n > 16$ pour tout entier naturel n .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit (v_n) la suite numérique telle que $v_n = u_n - 16$ pour tout entier naturel n .

a) (0.5 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) En déduire que $u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout entier naturel n , puis déterminer la limite de la suite (u_n) .

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.5 pt) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n < 16,0001$.

► Afficher / Masquer la solution

Problème (8,5 points)

I – Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 1 - (x + 1)^2 e^x.$$

1) (0.25 pt) Vérifier que $g(0) = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

2) (1 pt) À partir de la courbe représentative ($\mathcal{C}_g$) de la fonction g (voir figure ci-contre), montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout x de $] -\infty, 0]$ et que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $[0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

II – On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$.

Soit ($\mathcal{C}_f$) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1) a) (0.75 pt) Vérifier que $f(x) = x + 1 - 4 \left(\frac{x}{2} e^{x/2} \right)^2 - e^x$ pour tout réel x , puis en déduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)]$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe ($\mathcal{C}_f$) au voisinage de $-\infty$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.25 pt) Montrer que la courbe ($\mathcal{C}_f$) est en dessous de la droite (D).

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0.5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (on pourra écrire $f(x)$ sous la forme $x \left[1 + \frac{1}{x} - \left(x + \frac{1}{x} \right) e^x \right]$).

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.25 pt) Montrer que la courbe ($\mathcal{C}_f$) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on déterminera la direction.

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (0.75 pt) Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout réel x .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Montrer que la fonction f est croissante sur $] -\infty, 0]$ et décroissante sur $[0, +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.75 pt) Montrer que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet deux points d'inflexion d'abscisses -3 et -1 .

► Afficher / Masquer la solution

4) (1 pt) Construire dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

(On prendra $f(-3) \simeq -2,5$ et $f(-1) \simeq -0,75$.)

► Afficher / Masquer la solution

5) a) (0.5 pt) Vérifier que $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right).$$

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.5 pt) Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite (D) , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = -1$.

► Afficher / Masquer la solution