

# Examen national du baccalauréat

## Session de rattrapage 2018

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

**Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française** Code RS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

### INSTRUCTIOS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

### COMPOSANTES DU DUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivants les domaines comme suit :

|            | Domaine                                             | Barème   |
|------------|-----------------------------------------------------|----------|
| Exercice 1 | Géométrie dans l'espace                             | 3 points |
| Exercice 2 | Nombres complexes                                   | 3 points |
| Exercice 3 | Calcul des probabilités                             | 3 points |
| Exercice 4 | Calcul intégral                                     | 2 points |
| Problème   | Etude d'une fonction numérique et suites numériques | 9 points |

#### Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère la sphère  $(S)$  de centre  $\Omega(2, 1, 2)$  et de rayon 3 et le plan  $(P)$  passant par le point  $A(-1, 0, 3)$  et dont  $\vec{u}(4, 0, -3)$  est un vecteur normal.

1) (0.5 pt) Montrer qu'une équation de  $(S)$  est :  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z = 0$ .

► Afficher / Masquer la solution

2) (0.5 pt) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan  $(P)$  est  $4x - 3z + 13 = 0$ .

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (0.5 pt) Vérifier que  $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 \\ z = 2 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$  est une représentation paramétrique de la droite  $(\Delta)$  passant par le point  $\Omega$  et orthogonale au plan  $(P)$ .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Déterminer les coordonnées du point  $H$  point d'intersection de la droite  $(\Delta)$  et du plan  $(P)$ .

► Afficher / Masquer la solution

4) a) (0.25 pt) Calculer  $d(\Omega, (P))$ .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Montrer que le plan  $(P)$  est tangent à la sphère  $(S)$  en un point que l'on déterminera.

► Afficher / Masquer la solution

### Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

1) (0.75 pt) Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes, l'équation :  $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$ .

► Afficher / Masquer la solution

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ , on considère le point  $A$  d'affixe  $a = \sqrt{2}(1 - i)$  et la rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

a) (0.25 pt) Écrire  $a$  sous forme trigonométrique.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Vérifier que l'affixe du point  $B$  image du point  $A$  par la rotation  $R$  est

$$b = 2\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right).$$

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (0.5 pt) On considère le point  $C$  d'affixe  $c = 1 + i$ . Montrer que  $|b^2 - c^2| = 2\sqrt{3}$ .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Soit  $T$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{OC}$  et  $D$  l'image du point  $B$  par la translation  $T$ . Montrer que  $OD = |b + c|$ .

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.5 pt) En déduire que  $OD \times BC = 2\sqrt{3}$ .

► Afficher / Masquer la solution

### Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher : trois boules de couleur rouge portant chacune le nombre 1, et trois boules de couleur rouge portant chacune le nombre 2, et six boules de couleur verte portant chacune le nombre 2.

On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. On considère les événements suivants : -  $A$  : « Obtenir deux boules portant le même nombre » -  $B$  : « Obtenir deux boules de couleurs différentes » -  $C$  : « Obtenir deux boules portant deux nombres dont la somme est égale à 3 »

1) (1.5 pt) Montrer que  $p(A) = \frac{13}{22}$  et  $p(B) = \frac{6}{11}$  et calculer  $p(C)$ .

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0.5 pt) Montrer que  $p(A \cap B) = \frac{3}{11}$ .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

► Afficher / Masquer la solution

3) (0.5 pt) Sachant que l'événement  $B$  est réalisé, calculer la probabilité d'obtenir deux boules portant le même nombre.

► Afficher / Masquer la solution

#### Exercice 4 : Calcul intégral (2 points)

1) a) (0.5 pt) Montrer que la fonction  $H : x \mapsto x e^x$  est une primitive de la fonction  $h : x \mapsto (x + 1)e^x$  sur  $\mathbb{R}$ .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) En déduire que :  $\int_0^1 (x + 1)e^x dx = e$ .

► Afficher / Masquer la solution

2) (1 pt) En utilisant une intégration par parties, calculer  $\int_0^1 (x^2 + 2x - 1)e^x dx$ .

► Afficher / Masquer la solution

#### Problème (9 points)

I – Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = x^3 - 1 - 2 \ln^2 x + 2 \ln x$ .

Le tableau ci-contre est le tableau de variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  :

|         |           |                    |
|---------|-----------|--------------------|
| $x$     | 0         | $+\infty$          |
| $g'(x)$ |           | +                  |
| $g(x)$  | $-\infty$ | $\nearrow +\infty$ |

1) (0.25 pt) Calculer  $g(1)$ .

► Afficher / Masquer la solution

2) (0.5 pt) À partir de ce tableau, déterminer le signe de  $g(x)$  sur chacun des intervalles  $]0, 1]$  et  $[1, +\infty[$ .

► Afficher / Masquer la solution

II – On considère la fonction numérique  $f$  définie sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2.$$

Soit  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) (0.5 pt) Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Montrer que la droite (D) d'équation  $y = x - \frac{1}{2}$  est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de  $+\infty$ .

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.25 pt) Déterminer la position relative de la droite (D) et de la courbe (C).

► Afficher / Masquer la solution

2) (0.75 pt) Montrer que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$  et interpréter géométriquement le résultat.

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (1 pt) Montrer que  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Montrer que la fonction  $f$  est décroissante sur  $]0, 1]$  et est croissante sur  $[1, +\infty[$ .

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.5 pt) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

► Afficher / Masquer la solution

4) (1 pt) Construire dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , la droite  $(D)$  et la courbe  $(\mathcal{C})$  (unité : 1 cm).

► Afficher / Masquer la solution

III – On considère la fonction numérique  $h$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $h(x) = f(x) - x$ .

1) a) (0.25 pt) Vérifier que  $h(1) = 0$ .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Dans la figure ci-contre  $(\mathcal{C}_h)$  est la courbe représentative de la fonction  $h$ . Déterminer le signe de  $h(x)$  sur chacun des intervalles  $]0, 1]$  et  $[1, +\infty[$  puis en déduire que  $f(x) \leq x$  pour tout  $x$  de  $[1, +\infty[$ .

► Afficher / Masquer la solution

2) On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = e$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

a) (0.75 pt) Montrer par récurrence que  $1 \leq u_n \leq e$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante (on pourra utiliser le résultat de la question III)1)b)).

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.75 pt) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

► Afficher / Masquer la solution