

Examen national du baccalauréat

Session normale 2019

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code NS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

INSTRUCTIOS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	3 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	3 points
Problème	Etude des fonctions, suites numériques et calcul intégral	11 points

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; -1; -1)$, $B(0; -2; 1)$ et $C(1; -2; 0)$.

1) a) (0.75 pt) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

b) (0.5 pt) En déduire que $x + y + z + 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

2) (0.75 pt) Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z + 1 = 0$.

Montrer que le centre de la sphère (S) est $\Omega(2; -1; 1)$ et que son rayon est $R = \sqrt{5}$.

3) a) (0.5 pt) Calculer $d(\Omega, (ABC))$ la distance du point Ω au plan (ABC) .

b) (0.5 pt) En déduire que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) .

(la détermination du centre et du rayon de (Γ) n'est pas Demandée)

Exercice 2 : Nombres complexes (3 points)

1) (0.75 pt) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B , C et D d'affixes respectives :

$$a = 1 - i\sqrt{3}, \quad b = 2 + 2i, \quad c = \sqrt{3} + i \quad \text{et} \quad d = -2 + 2\sqrt{3}.$$

a) (0.5 pt) Vérifier que : $a - d = -\sqrt{3}(c - d)$.

b) (0.25 pt) En déduire que les points A , C et D sont alignés.

3) (0.5 pt) On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Vérifier que : $z' = \frac{1}{2}az$.

4) Soient H l'image du point B par la rotation R , h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p = a - c$.

a) (0.5 pt) Vérifier que : $h = ip$.

b) (0.5 pt) Montrer que le triangle OHP est rectangle et isocèle en O .

Exercice 3 : Calcul des probabilités (3 points)

Une urne contient dix boules : trois boules vertes, six boules rouges et une boule noire indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.

On considère les événements suivants : - A : « Obtenir trois boules vertes » - B : « Obtenir trois boules de même couleur » - C : « Obtenir au moins deux boules de même couleur »

1) (2 pts) Montrer que $p(A) = \frac{1}{120}$ et $p(B) = \frac{7}{40}$.

2) (1 pt) Calculer $p(C)$.

Problème (11 points)

Première partie :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).

1) (0.5 pt) Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$ puis interpréter le résultat géométriquement.

2) a) (0.25 pt) Vérifier que pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \ln x - 1\right) \ln x.$$

b) (0.5 pt) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

c) (0.5 pt) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2,$$

puis en déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

d) (0.75 pt) Montrer que $(\mathcal{C})$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$.

3) a) (0.5 pt) Vérifier que pour tout x de $]0; 1]$ on a : $(x - 1) + \ln x \leq 0$ et que pour tout x de $[1; +\infty[$ on a : $(x - 1) + \ln x \geq 0$.

b) (1 pt) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x - 1 + \ln x}{x}$.

c) (0.5 pt) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

4) a) (0.5 pt) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x^2}$.

b) (0.5 pt) En déduire que $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

5) a) (0.5 pt) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ et en déduire la position relative de $(\mathcal{C})$ et (Δ) .

b) (1 pt) Construire (Δ) et $(\mathcal{C})$ dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

6) a) (0.5 pt) Montrer que la fonction $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur $]0; +\infty[$.

b) (0.75 pt) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$.

c) (0.5 pt) Calculer en cm^2 l'aire du domaine plan limité par $(\mathcal{C})$ et (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Deuxième partie :

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) a) (0.5 pt) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) (0.5 pt) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) (0.5 pt) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) (0.75 pt) Calculer la limite de la suite (u_n) .