

Examen national du baccalauréat

Session normale 2020

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code NS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

INSTRUCTIOS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivants les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	4 points
Exercice 2	Nombres complexes	5 points
Exercice 3	Limites, dérivabilité et calcul intégral	4 points
Problème	Etude d'une fonction numérique	7 points

Exercice 1 : Suites numériques (4 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) (0.25 pt) Calculer u_1

2) (0.5 pt) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 0$

3) a) (1 pt) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$. Puis en déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

b) (0.5 pt) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4) On considère la suite numérique (v_n) définie par : $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

a) (0.75 pt) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$

b) (1 pt) Déterminer v_n en fonction de n , et en déduire u_n en fonction de n

Exercice 2 : Nombres complexes (5 points)

1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})z + 16 = 0$$

a) (0.5 pt) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = -4(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$

b) (1 pt) En déduire les solutions de l'équation (E)

2) Soient les nombres complexes $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $b = 1 + i\sqrt{3}$ et $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

a) (0.75 pt) Vérifier que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$

b) (0.5 pt) Ecrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique

c) (0.5 pt) En déduire que : $a = 4\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points B , C et D d'affixes respectives b , c et d telle que $d = a^4$.

Soit z l'abscisse d'un point M du plan et z' l'abscisse de M' l'image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$

a) (0.5 pt) Vérifier que $z' = \frac{1}{4}az$

b) (0.25 pt) Déterminer l'image du point C par la rotation R

c) (0.25 pt) Déterminer la nature du triangle OBC

d) (0.75 pt) Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O , B et D sont alignés

Exercice 3 : Limites, dérivabilité et calcul intégral (4 points)

On considère la fonction numérique g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$

1) a) (0.5 pt) Montrer que pour tout x de $]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x}$

b) (0.5 pt) Montrer que g est croissante sur $[1, +\infty[$

c) (0.5 pt) En déduire que pour tout x de $[1, +\infty[$, $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$ (remarquer que $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$)

d) (1 pt) Montrer que pour tout x de $[1, +\infty[$, $0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$

2) a) (0.75 pt) Montrer que la fonction $G : x \mapsto x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)$ est une primitive de g sur $]0, +\infty[$

b) (0.75 pt) Calculer l'intégrale $\int_1^4 g(x) dx$

Problème (7 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : $2cm$)

1) (0.5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) a) (0.5 pt) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = -x + \frac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

b) (0.75 pt) Résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$ puis montrer que la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $] -\infty, 2 + \ln 4]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2 + \ln 4, +\infty[$

3) (0.5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter géométriquement le résultat

- 4) a)** (0.5 pt) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$
- b)** (0.25 pt) Dresser le tableau de variations de la fonction f
- 5)** (0.75 pt) Calculer $f''(x)$ pour tout réel x , puis montrer que $A(2, 2)$ est un point d'inflexion de la courbe (C)
- 6)** (0.5 pt) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$
- 7)** (1 pt) Construire (C) et (Δ) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prend $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 1,1$)
- 8) a)** (0.5 pt) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$
- b)** (0.75 pt) Construire dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} (remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère)
- c)** (0.5 pt) Calculer $(f^{-1})'(2 - \ln 3)$ (remarquer que $f^{-1}(2 - \ln 3) = 2 + \ln 3$)