

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2020

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code RS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

INSTRUCTIOS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU DUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivants les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	2 points
Exercice 2	Nombres complexes	5 points
Exercice 3	Dérivabilité et calcul intégral	4 points
Problème	Etude des fonctions numériques et suites numériques	9 points

- On désigne par $|z|$ le module du nombre complexe z et par $\bar{z}$ son conjugué.
- $\ln$ désigne le logarithme népérien.

Exercice 1 : Suites numériques (2 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n - 8}{2u_n - 5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1) (0.5 pt) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n < 2$

► Afficher / Masquer la solution

2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$

a) (0.5 pt) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Ecrire v_n en fonction de n et en déduire u_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.25 pt) Calculer la limite de la suite (u_n) .

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 2 : Nombres complexes (5 points)

1) (0.75 pt) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.

► Afficher / Masquer la solution

2) On pose $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

a) (0.75 pt) Ecrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2020} est un nombre réel.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Soit le nombre complexe $b = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$. Montrer que $b^2 = a$.

► Afficher / Masquer la solution

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les point A , B et C d'affixes respectives a , b et c tel que $c = 1$. La rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{8}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z' .

a) (0.25 pt) Vérifier que : $z' = bz$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Déterminer l'image du point C par la rotation R et montrer que A est l'image du point B par R .

► Afficher / Masquer la solution

4) a) (0.75 pt) Montrer que : $|a - b| = |b - c|$ et en déduire la nature du triangle ABC .

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

► Afficher / Masquer la solution

5) Soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ et D l'image de A par T .

a) (0.25 pt) Vérifier que l'affixe de D est $b^2 + 1$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Montrer que $\frac{b^2 + 1}{b} = b + \bar{b}$ et en déduire que les points O , B et D sont alignés.

► Afficher / Masquer la solution

Exercice 3 : Dérivabilité et calcul intégral (4 points)

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x - 2x + 2 - 3e^{-x}$.

1) a) (0.5 pt) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $u'(x) = \frac{(e^x - 1)^2 + 2}{e^x}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.25 pt) Dresser le tableau de variations de la fonction u (sans calcul de limites)

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.5 pt) En déduire le signe de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (remarquer que $u(0) = 0$).

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $v(x) = e^{2x} - 2xe^x + 2e^x - 3$.

a) (0.5 pt) Vérifier que pour x de $\mathbb{R}$, $v(x) = e^x u(x)$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) En déduire le signe de la fonction v sur $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (0.5 pt) Montrer que la fonction w définie sur $\mathbb{R}$ par : $w(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + (4 - 2x)e^x - 3x$ est une primitive de la fonction v sur $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Calculer l'intégrale $\int_0^2 v(x) dx$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.75 pt) Montrer que $\frac{9}{2}$ est le minimum absolu de la fonction w sur $\mathbb{R}$.

► Afficher / Masquer la solution

Problème (9 points)

I - Soit g la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2$

1) (0.5 pt) Montrer que $g'(x) < 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

► Afficher / Masquer la solution

2) (0.5 pt) Déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ (remarquer que $g(1) = 0$)

► Afficher / Masquer la solution

II – On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = (1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln x$$

et soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2 cm)

1) (0.5 pt) Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.

► Afficher / Masquer la solution

2) a) (0.5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement.

► Afficher / Masquer la solution

3) a) (1 pt) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = (x - 2)g(x)$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.75 pt) Montrer que la fonction f est décroissante sur $]0, 1]$ et sur $[2, +\infty[$ et est croissante sur $[1, 2]$.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.25 pt) Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$. (on admet que $f(2) \simeq 1,25$)

► Afficher / Masquer la solution

4) (0.5 pt) Sachant que $f(3) \simeq 0,5$ et $f(4) \simeq -1,9$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]3, 4[$.

► Afficher / Masquer la solution

5) (1 pt) Construire la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

► Afficher / Masquer la solution

III – On pose $h(x) = f(x) - x$ pour tout x de l'intervalle $[1, 2]$.

1) a) (0.5 pt) A partir du tableau de variations de la fonction h ci-contre

x	1	2
$h'(x)$	–	
$h(x)$	0	$\searrow$ $h(2)$

montrer que $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [1, 2]$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.25 pt) Montrer que 1 est la seule solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[1, 2]$.

► Afficher / Masquer la solution

2) Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) (0.75 pt) Montrer par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

► Afficher / Masquer la solution

b) (0.5 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

► Afficher / Masquer la solution

c) (0.75 pt) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

► Afficher / Masquer la solution