# Examen national du baccalauréat

**Session normale 2021**

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

**Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française** Code NS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

## INSTRUCTIOS GENERALES

— L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
— Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
— L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

## COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème indépendants entre eux et répartis suivants les domaines comme suit :

| | Domaine | Barème |
|---|---|---|
| Exercice 1 | Analyse | 2 points |
| Exercice 2 | Suites numériques | 4 points |
| Exercice 3 | Nombres complexes | 5 points |
| Problème | Etude des fonctions et calcul intégral | 9 points |

## Exercice 1 : Analyse (2 points)

**1) a)** *(0.5 pt)* Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

**Correction**

On pose $X = e^x$ (avec $X > 0$). L'équation devient $X^2 - 4X + 3 = 0$, soit $(X-1)(X-3) = 0$, donc $X = 1$ ou $X = 3$ (deux valeurs strictement positives).

— $e^x = 1 \iff x = 0$ ;
— $e^x = 3 \iff x = \ln 3$.

Donc $S = \{0\,;\,\ln 3\}$.

**1) b)** *(0.5 pt)* Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $e^{2x} - 4e^x + 3 \leq 0$

**Correction**

D'après 1.a : $e^{2x} - 4e^x + 3 = (e^x - 1)(e^x - 3)$.

$$(e^x - 1)(e^x - 3) \leq 0 \iff 1 \leq e^x \leq 3 \iff 0 \leq x \leq \ln 3.$$

Donc $S = [0\,;\,\ln 3]$.

**1) c)** *(0.5 pt)* Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1}$

**Correction**

Pour $x \neq 0$ : $e^{2x} - 1 = (e^x - 1)(e^x + 1)$ et $e^x - 1 \neq 0$, donc

$$\frac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1} = \frac{(e^x - 1)(e^x - 3)}{(e^x - 1)(e^x + 1)} = \frac{e^x - 3}{e^x + 1}.$$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 4e^x + 3}{e^{2x} - 1} = \dfrac{1 - 3}{1 + 1} = -1$.

**2)** *(0.5 pt)* Montrer que l'équation $e^{2x} + e^x + 4x = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[-1, 0]$

**Correction**

Soit $\varphi(x) = e^{2x} + e^x + 4x$. La fonction $\varphi$ est continue sur $[-1, 0]$ (somme de fonctions continues).

— $\varphi(-1) = e^{-2} + e^{-1} - 4 < 0$ (car $e^{-2} < 1$ et $e^{-1} < 1$) ;

— $\varphi(0) = 1 + 1 + 0 = 2 > 0$.

Donc $\varphi(-1) \times \varphi(0) < 0$ et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\varphi(x) = 0$, c'est-à-dire $e^{2x} + e^x + 4x = 0$, admet au moins une solution dans $[-1, 0]$.

*Remarque :* $\varphi'(x) = 2e^{2x} + e^x + 4 > 0$, donc cette solution est unique.

## Exercice 2 : Suites numériques (4 points)

Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n}$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

**1)** *(0.25 pt)* Calculer $u_1$

**Correction**

$$u_1 = \frac{u_0}{3 - 2u_0} = \frac{\frac{1}{2}}{3 - 1} = \frac{1}{4}.$$

**2)** *(0.5 pt)* Montrer par récurrence que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$

**Correction**

**Initialisation.** $u_0 = \frac{1}{2}$ et $0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ : la propriété est vraie pour $n = 0$.

**Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ ; supposons $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$. Alors $-1 \leq -2u_n < 0$, donc $2 \leq 3 - 2u_n < 3$ ; en particulier $3 - 2u_n > 0$.

— $u_n > 0$ et $3 - 2u_n > 0$, donc $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n} > 0$ ;

— $u_n \leq \frac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3 - 2u_n} \leq \dfrac{1}{2}$, donc $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{2}$.

Donc $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

D'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $0 < u_n \leq \frac{1}{2}$.

**3) a)** *(0.5 pt)* Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$

**Correction**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n > 0$ :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3 - 2u_n}.$$

Or $u_n \leq \frac{1}{2}$, donc $3 - 2u_n \geq 2 > 0$, d'où $\dfrac{1}{3 - 2u_n} \leq \dfrac{1}{2}$.

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$.

**3) b)** *(0.5 pt)* En déduire la monotonie de la suite $(u_n)$

**Correction**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, donc d'après 3.a : $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n < u_n$.

Donc la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.

**4) a)** *(0.75 pt)* Montrer que tout $n$ de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$, puis calculer la limite de la suite $(u_n)$

**Correction**

*Remarque : coquille de l'énoncé officiel, il faut lire « Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ ».*

On a déjà $u_n > 0$ (question 2). Montrons par récurrence que $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

— Pour $n = 0$ : $u_0 = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1$ : vrai.

— Soit $n \in \mathbb{N}$ ; supposons $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. D'après 3.a, $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

D'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. Avec la question 2, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$ ; par encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**4) b)** *(0.5 pt)* On pose $v_n \ln(3 - 2u_n)$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

**Correction**

*Remarque : coquille de l'énoncé officiel, le signe « = » manque ; il faut lire* $v_n = \ln(3 - 2u_n)$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (3 - 2u_n) = 3$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ln 3$.

**5) a)** *(0.5 pt)* Vérifier que tout $n$ de $\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\dfrac{1}{u_n} - 1\right)$

**Correction**

Soit $n \in \mathbb{N}$ ($u_n \neq 0$ et $u_{n+1} \neq 0$) :

$$\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{3 - 2u_n}{u_n} - 1 = \frac{3}{u_n} - 2 - 1 = \frac{3}{u_n} - 3 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right).$$

**5) b)** *(0.5 pt)* En déduire $u_n$ en fonction de $n$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

**Correction**

Posons $w_n = \dfrac{1}{u_n} - 1$. D'après 5.a, $w_{n+1} = 3w_n$ : $(w_n)$ est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $w_0 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} - 1 = 1$.
Donc $w_n = 1 \times 3^n = 3^n$, puis $\dfrac{1}{u_n} = 1 + 3^n$, d'où :

$$u_n = \frac{1}{1 + 3^n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

## Exercice 3 : Nombres complexes (5 points)

**1)** *(0.75 pt)* Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - \sqrt{3}\,z + 1 = 0$

**Correction**

$\Delta = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 3 - 4 = -1 = i^2 < 0$.
L'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Donc $S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\,;\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$.

**2)** Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**2) a)** *(0.25 pt)* Ecrire $a$ sous forme algébrique.

**Correction**

$$a = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

**2) b)** *(0.5 pt)* Vérifier que $\overline{a}\,b = \sqrt{3}$

**Correction**

$\overline{a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$, donc

$$\overline{a}\,b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i - \frac{3}{4}i - \frac{\sqrt{3}}{4}i^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$$

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les Points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $a$, $b$ et $\overline{a}$.

**3)** *(0.5 pt)* Montrer que le point $B$ est l'image du point $A$ par une homothétie $h$ de centre $O$ dont on déterminera le rapport.

**Correction**

$|a| = 1$, donc $a\,\overline{a} = 1$. En multipliant l'égalité $\overline{a}\,b = \sqrt{3}$ par $a$ : $b = \sqrt{3}\,a$, c'est-à-dire $b - 0 = \sqrt{3}\,(a - 0)$.
Donc $\overrightarrow{OB} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{OA}$ : $B$ est l'image de $A$ par l'homothétie $h$ de centre $O$ et de rapport $\sqrt{3}$.

**4)** Soient $z$ l'affixe d'un point $M$ du plan et $z'$ l'affixe du point $M'$ image de $M$ par la rotation $R$ de centre $A$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

**4) a)** *(0.5 pt)* Ecrire $z'$ en fonction de $z$ et $a$.

**Correction**

$$R(M) = M' \iff z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a) \iff z' = i(z-a) + a.$$

Donc $z' = iz + (1-i)a$.

**4) b)** *(0.25 pt)* Soit $d$ l'affixe du point $D$ image de $C$ par la rotation $R$, montrer que $d = a + 1$.

**Correction**

$d = i(\overline{a} - a) + a$. Or $\overline{a} - a = -2i\,\mathrm{Im}(a) = -2i \times \frac{1}{2} = -i$.
Donc $d = i \times (-i) + a = 1 + a$, soit $d = a + 1$.

**4) c)** *(0.5 pt)* Soit $I$ le point d'affixe le nombre 1, montrer que $ADIO$ est un losange.

**Correction**

$d - a = 1 = 1 - 0$, donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OI}$ : le quadrilatère $ADIO$ est un parallélogramme.
De plus $OA = |a| = 1$ et $OI = |1| = 1$ : deux côtés consécutifs ont la même longueur.
Donc $ADIO$ est un losange.

**5) a)** *(0.75 pt)* Vérifier que $d - b = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$ ; en déduire un argument du nombre Complexe $d - b$

**Correction**

$d = a + 1 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) + \dfrac{1}{2}i$, donc

$$d - b = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}i = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i).$$

Or $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ et $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} > 0$, donc

$$d - b = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \quad \text{et} \quad \arg(d-b) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

**5) b)** *(0.5 pt)* Ecrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique.

**Correction**

$1 - b = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, et $|1-b| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$.

$$1 - b = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \quad \left(\text{ou } \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

**5) c)** *(0.5 pt)* Déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}\right)$.

**Correction**

$$\left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-b}{1-b}\right) \equiv \arg(d-b) - \arg(1-b) \equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi].$$

Une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}\right)$ est donc $\dfrac{5\pi}{12}$.

## Problème (9 points)

Soit $f$ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(0)=0$ et $f(x)=2x\ln x-2x$, si $x>0$

Et $(C)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ (unité : $1cm$)

**1)** *(0.5 pt)* Montrer que $f$ est continue à droite au point 0.

**Correction**

On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$, donc

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x\ln x-2x)=0-0=0=f(0).$$

Donc $f$ est continue à droite au point 0.

**2) a)** *(0.5 pt)* Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

**Correction**

$f(x)=2x(\ln x-1)$ ; or $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-1)=+\infty$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

**2) b)** *(0.5 pt)* Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter géométriquement le résultat

**Correction**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}(2\ln x-2)=+\infty.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$, la courbe $(C)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

**3) a)** *(0.75 pt)* Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.

**Correction**

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}(2\ln x-2)=-\infty.$$

Comme $f(0)=0$, $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ : $f$ n'est pas dérivable à droite en 0, et la courbe $(C)$ admet au point $O$ une demi-tangente verticale (dirigée vers le bas).

**3) b)** *(0.5 pt)* Calculer $f'(x)$ pour tout $x$ de $]0,+\infty[$

**Correction**

$f$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$ :

$$f'(x)=2\ln x+2x\times\frac{1}{x}-2=2\ln x.$$

**3) c)** *(0.5 pt)* Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur $[0,+\infty[$.

**Correction**

$f'(x)=2\ln x$ : $f'(x)<0$ sur $]0,1[$, $f'(1)=0$ et $f'(x)>0$ sur $]1,+\infty[$. $f(1)=2\ln 1-2=-2$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$f$ est strictement décroissante sur $[0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

**4) a)** *(0.5 pt)* Résoudre dans l'intervalle $[0,+\infty[$ les équations $f(x)=0$ et $f(x)=x$

**Correction**

— $f(0) = 0$ : $x = 0$ est solution des deux équations.
— Pour $x > 0$ : $f(x) = 0 \iff 2x(\ln x - 1) = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$.
— Pour $x > 0$ : $f(x) = x \iff x(2\ln x - 3) = 0 \iff \ln x = \dfrac{3}{2} \iff x = e^{\frac{3}{2}}$.

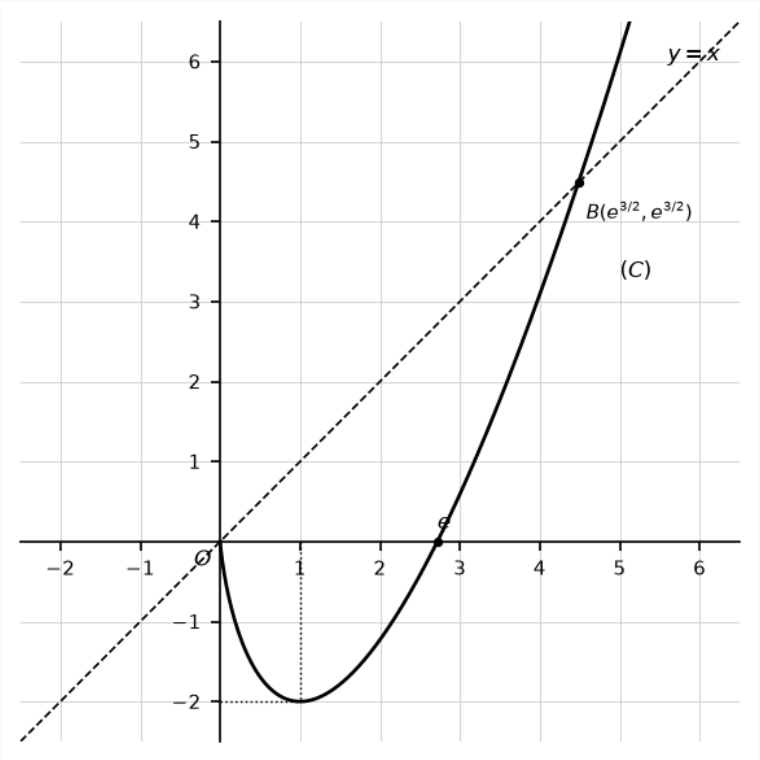
Donc $f(x) = 0 \iff x \in \{0\,;\,e\}$ et $f(x) = x \iff x \in \left\{0\,;\,e^{\frac{3}{2}}\right\}$.

$(C)$ coupe l'axe des abscisses en $O$ et en $A(e, 0)$, et la droite $(\Delta) : y = x$ en $O$ et en $B\left(e^{\frac{3}{2}}, e^{\frac{3}{2}}\right)$.

**4) b)** *(1 pt)* Construire $(C)$ la courbe dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (On prendra $e^{\frac{3}{2}} \simeq 4{,}5$)

**Correction**

On place : la demi-tangente verticale en $O$, le minimum $(1, -2)$ (tangente horizontale), $A(e, 0)$, $B(4{,}5\,;4{,}5)$ et la branche parabolique verticale.




**5) a)** *(0.5 pt)* En utilisant une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{1 + e^2}{4}$

**Correction**

On pose $u(x) = \ln x$, $v'(x) = x$ ; alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$, $v(x) = \dfrac{x^2}{2}$ ($u$ et $v$ sont dérivables à dérivées continues sur $[1, e]$).

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{1 + e^2}{4}.$$

**5) b)** *(0.5 pt)* En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^e f(x) \, dx$

**Correction**

$$\int_1^e f(x) \, dx = 2\int_1^e x \ln x \, dx - \int_1^e 2x \, dx = \frac{1 + e^2}{2} - \left[x^2\right]_1^e = \frac{1 + e^2}{2} - (e^2 - 1) = \frac{3 - e^2}{2}.$$

**6) a)** *(0.25 pt)* Déterminer le minimum de $f$ sur $]0, +\infty[$

**Correction**

D'après le tableau de variations, $f$ est décroissante sur $]0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$ : le minimum de $f$ sur $]0, +\infty[$ est $f(1) = -2$.

**6) b)** *(0.5 pt)* En déduire que pour tout $x$ de $]0, +\infty[$, $\ln x \geq \dfrac{x - 1}{x}$

**Correction**

Pour tout $x > 0$ : $f(x) \geq -2$, soit $2x\ln x - 2x \geq -2$, d'où $x\ln x \geq x - 1$.
En divisant par $x > 0$ : $\ln x \geq \dfrac{x-1}{x}$.

**7)** Soit $g$ la restriction de la fonction $f$ à l'intervalle $[1, +\infty[$.

**7) a)** *(0.5 pt)* Montrer que la fonction $g$ admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ qu'on déterminera.

**Correction**

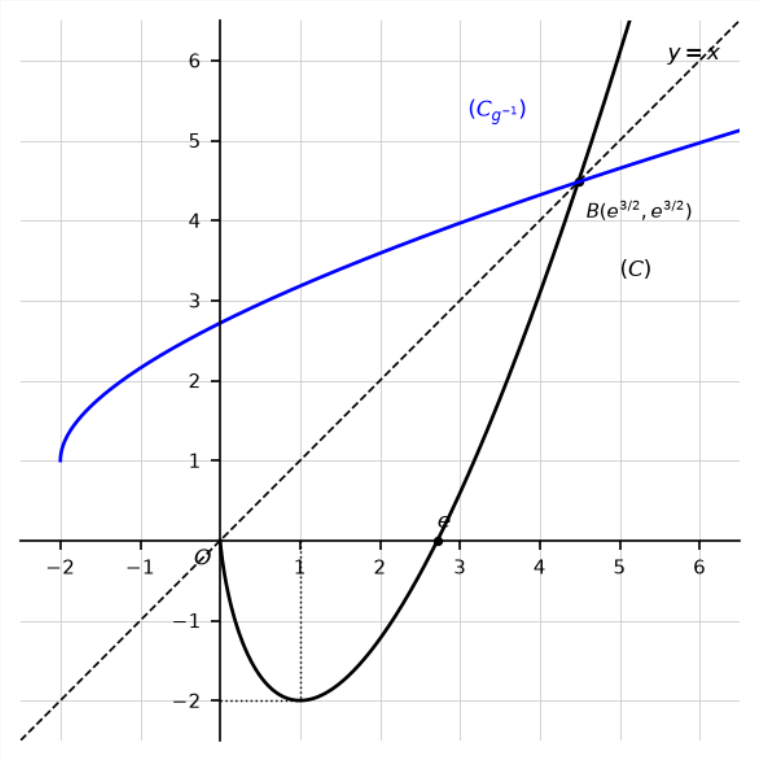
$g$ est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, donc elle admet une fonction réciproque $g^{-1}$ définie sur

$$J = g\left([1, +\infty[\right) = \left[g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[ = [-2, +\infty[.$$

**7) b)** *(0.75 pt)* Construire dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de $g^{-1}$.

**Correction**

La courbe de $g^{-1}$ est la symétrique de la partie de $(C)$ correspondant à $[1, +\infty[$ par rapport à la droite $(\Delta) : y = x$. Elle part du point $(-2, 1)$ (tangente verticale) et passe par $(0, e)$ et $B$.




**8)** On considère la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} h(x) = x^3 + 3x & ;\ x \leq 0 \\ h(x) = 2x\ln x - 2x & ;\ x > 0 \end{cases}$

**8) a)** *(0.5 pt)* Etudier la continuité de la fonction $h$ au point 0

**Correction**

$h(0) = 0^3 + 3 \times 0 = 0$.

— $\lim\limits_{x\to0^-} h(x) = \lim\limits_{x\to0^-} (x^3 + 3x) = 0 = h(0)$ ;

— $\lim\limits_{x\to0^+} h(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0 = h(0)$ (question 1).

Donc $h$ est continue au point 0.

**8) b)** *(0.5 pt)* Etudier la dérivabilité de la fonction $h$ à gauche au point 0, puis interpréter géométriquement le résultat.

**Correction**

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3+3x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (x^2+3) = 3.$$

Donc $h$ est dérivable à gauche en 0 et $h'_g(0) = 3$. La courbe de $h$ admet au point $O$ une demi-tangente à gauche d'équation $y = 3x$ $(x \leq 0)$.

**8) c)** *(0.25 pt)* La fonction $h$ est-elle dérivable au point 0 ? justifier.

**Correction**

$\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ (question 3.a) : $h$ n'est pas dérivable à droite en 0.
Donc $h$ n'est pas dérivable au point 0.