

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2021

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code NS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

INSTRUCTIONS GENERALES

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
- Le candidat peut traiter les exercices selon l'ordre qui lui convient
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

COMPOSANTES DU SUJET

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème Indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	4 points
Exercice 2	Nombres complexes	5 points
Exercice 3	Fonctions numériques	3 points
Problème	Etude des fonctions et calcul intégral	8 points

- On désigne par $\bar{Z}$ le conjugué du nombre complexe Z
- $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 : Suites numériques (4 points)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{n+1} = \frac{1+u_n}{3-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1) (0.5 pt) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$

2) a) (0.5 pt) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{3 - u_n}$

2) b) (0.5 pt) Montrer que la suite (u_n) est convergente

3) On pose $v_n = \frac{1}{1 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

3) a) (0.75 pt) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

3) b) (0.75 pt) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire que $u_n = \frac{n+1}{n+3}$, pour tout n de $\mathbb{N}$

3) c) (0.5 pt) Calculer la limite de la suite (u_n)

4) (0.5 pt) A partir de quelle valeur de l'entier naturel n , a-t-on $u_n > \frac{1011}{1012}$?

Exercice 2 : Nombres complexes (5 points)

- 1) (0.75 pt) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - 6z + 13 = 0$
- 2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère Les points A , B et C d'affixes respectives a , b et c telles que : $a = 3 + 2i$, $b = 3 - 2i$ et $c = -1 - 2i$.
- 2) a) (0.5 pt) Ecrire $\frac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique
- 2) b) (0.5 pt) En déduire la nature du triangle ABC
- 3) Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R , et soit D le point d'affixe $d = -3 - 4i$.
- 3) a) (0.5 pt) Ecrire z' en fonction de z
- 3) b) (0.25 pt) Vérifier que C est l'image de A par R
- 4) a) (0.5 pt) Montrer que les points A , C et D sont alignés
- 4) b) (0.5 pt) Déterminer le rapport de l'homothétie h de centre C et qui transforme A en D
- 4) c) (0.5 pt) Déterminer l'affixe m du point E pour que le quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme
- 5) a) (0.5 pt) Montrer que $\frac{d-a}{m-b}$ est un nombre réel
- 5) b) (0.5 pt) En déduire que le quadrilatère $ABED$ est un trapèze isocèle

Exercice 3 : Fonctions numériques (3 points)

On considère la fonction numérique h définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = x + \ln x$

- 1) (0.5 pt) Montrer que la fonction h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$
- 2) (0.5 pt) Déterminer $h(]0, +\infty[)$
- 3) a) (0.5 pt) En déduire que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0, +\infty[$
- 3) b) (0.5 pt) Montrer que $0 < \alpha < 1$
- 4) a) (0.5 pt) Vérifier que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha + \frac{1}{\alpha}$
- 4) b) (0.5 pt) En déduire que $h\left(\frac{1}{\alpha}\right) > 2$

Problème (8 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2 - xe^{-x+1}$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm)

1) (0.5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement

2) a) (0.5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2) b) (0.75 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ et interpréter le résultat géométriquement

3) a) (0.75 pt) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = (x-1)e^{-x+1}$

3) b) (0.5 pt) Dresser le tableau de variations de la fonction f

4) a) (0.5 pt) Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

4) b) (0.5 pt) Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion d'abscisse 2

5) (1 pt) Construire la courbe (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $f(2) \simeq 1,25$)

6) (0.5 pt) Déterminer la valeur minimale de la fonction f et en déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$ $e^{x-1} \geq x$

7) a) (0.5 pt) En utilisant une intégration par parties, calculer : $\int_0^2 xe^{-x} dx$

7) b) (0.5 pt) En déduire que : $\int_0^2 f(x) dx = 4 - e + 3e^{-1}$

8) Soit g la restriction de f à l'intervalle $] -\infty, 1]$.

8) a) (0.5 pt) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

8) b) (0.75 pt) Construire la courbe représentative de g^{-1} dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

8) c) (0.25 pt) A partir de la courbe représentative de g^{-1} , déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{g^{-1}(x)}{x} \right)$.