Examen national du baccalauréat — Session normale 2024

Sujet et corrigé détaillé

Prof. El Koudri Hamza

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (les deux parcours) — option française Code NS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

Instructions générales

— L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée
— Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient
— L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	4 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	2 points
Problème	Etude des fonctions numériques et calcul intégral	8 points

— On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
— Ln désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{1 + u_n}$ pour tout entier naturel n

1) a) *(0,25 pt)* vérifier que $u_{n+1} = 4 - \dfrac{6}{1 + u_n}$ pour tout entier naturel n.

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}$ (la suite étant bien définie, $1 + u_n \neq 0$). On réduit au même dénominateur :

$$4 - \frac{6}{1+u_n} = \frac{4(1+u_n) - 6}{1+u_n} = \frac{4 + 4u_n - 6}{1+u_n} = \frac{4u_n - 2}{1+u_n} = u_{n+1}.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 4 - \dfrac{6}{1+u_n}$.

b) *(0,5 pt)* Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$ pour tout entier naturel n.

Solution

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$: « $2 \leq u_n \leq 4$ ».
Initialisation. Pour $n = 0$: $u_0 = 4$ et $2 \leq 4 \leq 4$: $P(0)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $2 \leq u_n \leq 4$ et on montre que $2 \leq u_{n+1} \leq 4$.

$$2 \leq u_n \leq 4 \implies 3 \leq 1 + u_n \leq 5 \implies \frac{1}{5} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq \frac{1}{3} \implies \frac{6}{5} \leq \frac{6}{1+u_n} \leq 2$$

$$\implies -2 \leq -\frac{6}{1+u_n} \leq -\frac{6}{5} \implies 2 \leq 4 - \frac{6}{1+u_n} \leq \frac{14}{5}.$$

Donc $2 \leq u_{n+1} \leq \frac{14}{5} \leq 4$: $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. D'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2 \leq u_n \leq 4$.

2) a) *(0,25 pt)* Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-1)(2-u_n)}{1+u_n}$ pour tout entier naturel n.

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 2}{1+u_n} - u_n = \frac{4u_n - 2 - u_n - u_n^2}{1+u_n} = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{1+u_n}.$$

Or $(u_n-1)(2-u_n) = 2u_n - u_n^2 - 2 + u_n = -u_n^2 + 3u_n - 2$.
Donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-1)(2-u_n)}{1+u_n}$.

b) *(0,5 pt)* Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire que (u_n) est convergente.

Solution

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 1) b), $2 \leq u_n \leq 4$, donc :

— $u_n - 1 \geq 1 > 0$;
— $2 - u_n \leq 0$;
— $1 + u_n \geq 3 > 0$.

Donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-1)(2-u_n)}{1+u_n} \leq 0$: la suite (u_n) est décroissante.
La suite (u_n) est décroissante et minorée par 2 : elle est convergente.

3) Soit (v_n) la suite numérique définie $v_n = \dfrac{2-u_n}{1-u_n}$ pour tout entier naturel n.

a) *(0,5 pt)* Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

Solution

La suite (v_n) est bien définie car $u_n \geq 2$, donc $1 - u_n \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$2 - u_{n+1} = 2 - \frac{4u_n - 2}{1+u_n} = \frac{2 + 2u_n - 4u_n + 2}{1+u_n} = \frac{4 - 2u_n}{1+u_n} = \frac{2(2-u_n)}{1+u_n},$$

$$1 - u_{n+1} = 1 - \frac{4u_n - 2}{1+u_n} = \frac{1 + u_n - 4u_n + 2}{1+u_n} = \frac{3 - 3u_n}{1+u_n} = \frac{3(1-u_n)}{1+u_n}.$$

Donc

$$v_{n+1} = \frac{2-u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{2(2-u_n)}{3(1-u_n)} = \frac{2}{3}\,v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{2-4}{1-4} = \dfrac{2}{3}$.

b) *(0,5 pt)* Montrer que $u_n = 1 + \dfrac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$, pour tout entier naturel n.

Solution

D'après 3) a), pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0\, q^n = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.
On exprime u_n en fonction de v_n : $v_n = \dfrac{2-u_n}{1-u_n} \iff v_n - v_n u_n = 2 - u_n \iff u_n(1-v_n) = 2 - v_n$.
Comme $0 < v_n < 1$, on a $1 - v_n \neq 0$, donc

$$u_n = \frac{2-v_n}{1-v_n} = \frac{(1-v_n)+1}{1-v_n} = 1 + \frac{1}{1-v_n} = 1 + \frac{1}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}.$$

c) *(0,5 pt)* Calculer la limite de la suite (u_n).

Solution

Comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$, on a $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$.
Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1 + \frac{1}{1-0} = 2$.

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux points $A(-1,0,-1)$ et $B(1,2,-1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2,-2,1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2,-1,0)$ et de rayon 5.

1) *(0,25 pt)* Montrer que $2x-2y+z+3=0$ est une équation cartésienne du plan (P).

Solution

$\vec{n}(2,-2,1)$ est normal à (P), donc (P) a une équation de la forme $2x-2y+z+d=0$.
$A(-1,0,-1) \in (P)$, donc $2(-1)-2(0)+(-1)+d=0$, d'où $d=3$.
Donc $(P): 2x-2y+z+3=0$.

2) *(0,5 pt)* Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S).

Solution

$M(x,y,z) \in (S) \iff \Omega M^2 = 5^2 \iff (x-2)^2+(y+1)^2+z^2=25$.
En développant : $x^2+y^2+z^2-4x+2y+4+1-25=0$, donc

$$(S): x^2+y^2+z^2-4x+2y-20=0.$$

3) a) *(0,5 pt)* Vérifier que la distance du point au plan (P) est $d(\Omega,(P))=3$.

Solution

$$d(\Omega,(P)) = \frac{|2(2)-2(-1)+0+3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3.$$

b) *(0,25 pt)* En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.

Solution

$d(\Omega,(P)) = 3 < 5 = R$, donc le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon

$$r = \sqrt{R^2-d^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4.$$

4) a) *(0,5 pt)* Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P).

Solution

$(\Delta) \perp (P)$, donc $\vec{n}(2,-2,1)$ est un vecteur directeur de (Δ). Comme $\Omega(2,-1,0) \in (\Delta)$:

$$(\Delta): \begin{cases} x = 2+2t \\ y = -1-2t \\ z = t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

b) *(0,5 pt)* Montrer que le point $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ).

Solution

Le centre de (Γ) est le projeté orthogonal de Ω sur (P), c'est-à-dire le point d'intersection de (Δ) et (P).
Soit $M(2+2t,-1-2t,t) \in (\Delta)$. $M \in (P) \iff 2(2+2t)-2(-1-2t)+t+3=0 \iff 4+4t+2+4t+t+3=0 \iff 9t+9=0 \iff t=-1$.
Pour $t=-1$: $M(2-2,-1+2,-1)=(0,1,-1)=H$.
Donc $H(0,1,-1)$ est le centre du cercle (Γ).

c) *(0,5 pt)* Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$.

Solution

— Le milieu de $[AB]$ est $\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{-1-1}{2}\right) = (0, 1, -1) = H$, et $H \in (\Delta)$.
— $\overrightarrow{AB}(2, 2, 0)$ et $\vec{n}(2, -2, 1)$: $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 4 - 4 + 0 = 0$, donc $(\Delta) \perp (AB)$.

La droite (Δ) passe par le milieu H de $[AB]$ et elle est orthogonale à (AB) ; de plus elle coupe (AB) en H. Donc (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 3 : Nombres complexes (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = \sqrt{3}(1 - i)$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$.

1) *(0,5 pt)* Vérifier que $|a| = \sqrt{6}$ et que $\arg(z) \equiv -\dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

Solution

(L'énoncé écrit $\arg(z)$: il s'agit de $\arg(a)$.)
$|a| = \sqrt{3}\,|1 - i| = \sqrt{3} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{6}$.
$a = \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}i\right) = \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{6}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
Donc $\arg(a) \equiv -\dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

2) a) *(0,75 pt)* Montrer que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$ puis vérifier que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Solution

$$\frac{b}{a} = \frac{2+\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}(1-i)} = \frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{\sqrt{3}(1-i)(1+i)} = \frac{2+\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})i+i-1}{2\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})+(3+\sqrt{3})i}{2\sqrt{3}}.$$

Or $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}+3}{6}$ et $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3\sqrt{3}+3}{6} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.
Donc $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$.
D'autre part :

$$\frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{3\sqrt{3}+3}{6}i = \frac{3+\sqrt{3}}{6} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i = \frac{b}{a}.$$

b) *(0,75 pt)* En déduire une forme trigonométrique du nombre complexe b puis vérifier que b^{24} est un nombre réel.

Solution

$b = a \times \dfrac{b}{a} = \sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}} \times \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{6}(3+\sqrt{3})}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$.
Or $\dfrac{\sqrt{6}(3+\sqrt{3})}{3} = \dfrac{3\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{6}+\sqrt{2} > 0$ et $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$. Donc

$$b = (\sqrt{6}+\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

D'après la formule de Moivre : $b^{24} = (\sqrt{6}+\sqrt{2})^{24}\left(\cos\frac{24\pi}{12} + i\sin\frac{24\pi}{12}\right) = (\sqrt{6}+\sqrt{2})^{24}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = (\sqrt{6}+\sqrt{2})^{24}$.
Donc b^{24} est un nombre réel (strictement positif).

3) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'. On pose $R(B) = B'$, $R(A) = A'$ et $R(A') = A''$.

a) *(0,5 pt)* Vérifier que $z' = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z$ et que $\arg(a') \equiv -\dfrac{\pi}{12}\,[2\pi]$ où a' est l'affixe du point A'.

Solution

L'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ est $z' = e^{i\frac{\pi}{6}}z$, avec $e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$.
Donc $z' = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z$.
$a' = e^{i\frac{\pi}{6}}a$, donc $\arg(a') \equiv \dfrac{\pi}{6} + \arg(a) \equiv \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{4} \equiv -\dfrac{\pi}{12}\,[2\pi]$.

b) *(0,5 pt)* Montrer que l'affixe du point A'' est $a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points O, A'' et B sont alignés.

Solution

$a'' = e^{i\frac{\pi}{6}}a' = e^{i\frac{\pi}{6}}e^{i\frac{\pi}{6}}a = e^{i\frac{\pi}{3}}\sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{6}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$.
Alors $\dfrac{b-0}{a''-0} = \dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \in \mathbb{R}$.
Donc les points O, A'' et B sont alignés.

c) *(0,5 pt)* Montrer que b', l'affixe de B', vérifie $b' = \left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\overline{a}$.

Solution

$b' = e^{i\frac{\pi}{6}}b = e^{i\frac{\pi}{6}}(\sqrt{6}+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{12}} = (\sqrt{6}+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$.
D'autre part $\overline{a} = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc $\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\overline{a} = \dfrac{\sqrt{6}(3+\sqrt{3})}{3}e^{i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{6}+\sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$.
Donc $b' = \left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\overline{a}$.

d) *(0,5 pt)* En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O.

Solution

$$\frac{b'-0}{a-0} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \times \frac{\overline{a}}{a} = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3}i.$$

Donc $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{b'}{a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$: le triangle OAB' est rectangle en O.

Exercice 4 : Calcul des probabilités (2 points)

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2 et une boule portant le numéro 3. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

On considère les événements suivants :

A : « les deux boules tirées portent le même numéro »

B : « la somme des numéros des boules tirées est 4 »

1) *(0,5 pt)* Montrer que $p(A) = \dfrac{1}{3}$

Solution

Un tirage est une combinaison de 2 boules parmi 7 : $\text{card}(\Omega) = C_7^2 = \dfrac{7\times 6}{2} = 21$.
A : deux boules « 1 » ou deux boules « 2 » (il n'y a qu'une boule « 3 ») : $\text{card}(A) = C_4^2 + C_2^2 = 6 + 1 = 7$.
Donc $p(A) = \dfrac{7}{21} = \dfrac{1}{3}$.

2) *(0,5 pt)* Montrer que $p(B) = \dfrac{5}{21}$.

Solution

La somme vaut 4 si on tire $\{1,3\}$ ou $\{2,2\}$:
$\text{card}(B) = C_4^1 \times C_1^1 + C_2^2 = 4 + 1 = 5$. Donc $p(B) = \dfrac{5}{21}$.

3) *(0,5 pt)* Calculer $p(A \cap B)$.

Solution

$A \cap B$: « les deux boules portent le même numéro et leur somme est 4 », c'est-à-dire tirer les deux boules « 2 » : $\text{card}(A \cap B) = C_2^2 = 1$.
Donc $p(A \cap B) = \dfrac{1}{21}$.

4) *(0,5 pt)* Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Solution

$p(A) \times p(B) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{5}{21} = \dfrac{5}{63}$ et $p(A \cap B) = \dfrac{1}{21} = \dfrac{3}{63}$.
$p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$, donc les événements A et B ne sont pas indépendants.

Problème (8 points)

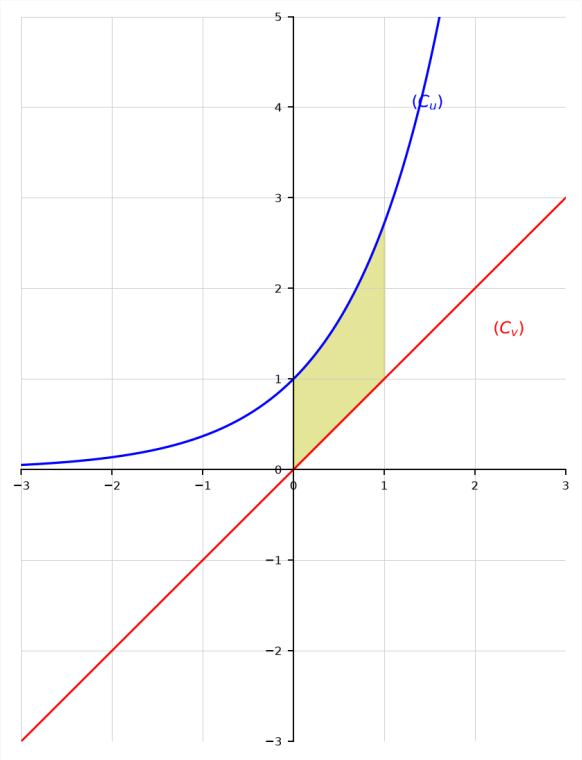
Partie I :

On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$.

1) *(0,5 pt)* Tracer dans un même repère orthonormé les courbes (C_u) et (C_v) des fonctions u et v.

Solution

(C_u) est la courbe de la fonction exponentielle (elle passe par $(0,1)$ et $(1,e)$, avec $e \approx 2,7$, et admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $-\infty$) ; (C_v) est la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).



Courbes (C_u) et (C_v) (la partie colorée correspond à la question 3)

2) *(0,25 pt)* Justifier graphiquement que $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Solution

Graphiquement, la courbe (C_u) est strictement au-dessus de la droite (C_v) sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) > v(x)$, c'est-à-dire $e^x > x$.

Donc $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

3) *(0,5 pt)* Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C_u), la courbe (C_v) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Solution

Sur $[0, 1]$, $e^x - x > 0$, donc l'aire (en unités d'aire) est

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (e^x - x)\,dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(e - \frac{1}{2}\right) - (1 - 0) = e - \frac{3}{2}.$$

Donc $\mathcal{A} = \left(e - \frac{3}{2}\right)$ u.a.

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$.

1) a) *(0,25 pt)* Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

Solution

$f(x)$ existe si et seulement si $e^x - x > 0$. D'après la partie I (question 2), $e^x - x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) *(0,5 pt)* Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$.

Solution

Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^x - x = e^x(1 - xe^{-x})$ et, comme $e^x > 0$ et $e^x - x > 0$, on a $1 - xe^{-x} > 0$. Donc

$$\ln(e^x - x) = \ln(e^x) + \ln(1 - xe^{-x}) = x + \ln(1 - xe^{-x}).$$

Donc $f(x) = x + 1 - x - \ln(1 - xe^{-x}) = 1 - \ln(1 - xe^{-x})$.

c) *(0,5 pt)* En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

Solution

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - xe^{-x}) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 - xe^{-x}) = \ln 1 = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 - 0 = 1$.
Interprétation : la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2) a) *(0,25 pt)* Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Solution

— $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x - x) = +\infty$;
— $\lim\limits_{x\to-\infty} (x + 1) = -\infty$.
Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b) *(0,5 pt)* Vérifier que pour tout $x < 0$, $f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$.

Solution

Soit $x < 0$. Alors $-x > 0$ et

$$e^x - x = -x\left(1 - \frac{e^x}{x}\right) = -x\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right).$$

Comme $e^x - x > 0$ et $-x > 0$, on a $1 - \frac{1}{xe^{-x}} > 0$, donc $\ln(e^x - x) = \ln(-x) + \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$.
Donc $f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$.

c) *(0,75 pt)* Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis déduire que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la

droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$.

Solution

Pour $x < 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{\ln(-x)}{-x} - \frac{1}{x}\ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right).$$

D'après 2) a) : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(-x)}{-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right) = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Puis $f(x) - x = 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \frac{1}{xe^{-x}}\right)$; comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(-x) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - x) = -\infty$: la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$.

3) a) *(0,5 pt)* Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{1-x}{e^x - x}$

Solution

La fonction $x \mapsto e^x - x$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{(e^x - x)'}{e^x - x} = 1 - \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{e^x - x - e^x + 1}{e^x - x} = \frac{1-x}{e^x - x}.$$

b) *(0,5 pt)* Etudier le signe de la fonction dérivée de f, puis déduire le tableau de variations de f.

Solution

Comme $e^x - x > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$:

— si $x < 1$: $f'(x) > 0$; si $x > 1$: $f'(x) < 0$; $f'(1) = 0$.

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, avec $f(1) = 2 - \ln(e-1) \approx 1,46$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2 - \ln(e-1)$	$\searrow$	1

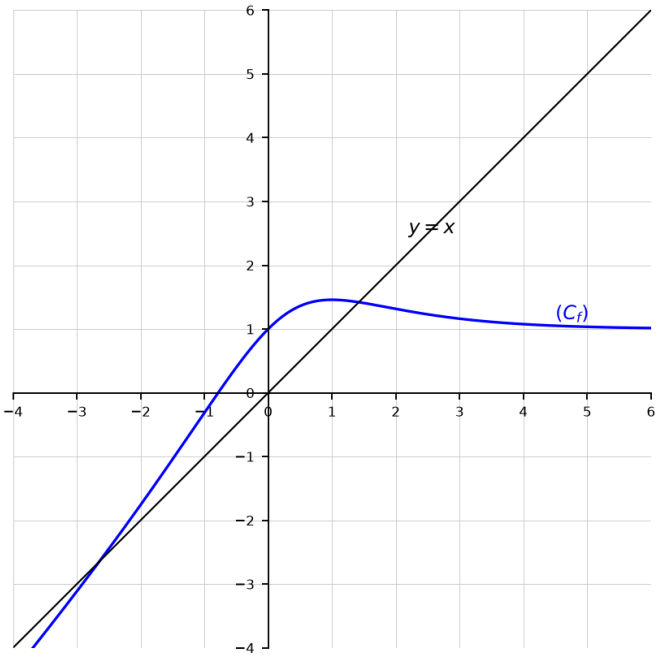
c) *(0,75 pt)* Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1, 0[$.

Solution

— f est continue et strictement croissante sur $[-1, 0]$ (car $[-1, 0] \subset]-\infty, 1]$) ;
— $f(-1) = -1 + 1 - \ln\left(e^{-1} + 1\right) = -\ln\left(1 + e^{-1}\right) < 0$ (car $1 + e^{-1} > 1$) ;
— $f(0) = 0 + 1 - \ln(1 - 0) = 1 > 0$.

Donc $f(-1) \times f(0) < 0$ et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1, 0[$.

4) La courbe (C_f) ci-contre est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.



Courbe (C_f) et la droite d'équation $y = x$

a) *(0,5 pt)* Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β.

Solution

Les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = x$.
Graphiquement, (C_f) coupe cette droite en deux points : l'équation $f(x) = x$ admet donc deux solutions α et β (avec $\alpha \approx -2,6$ et $\beta \approx 1,4$).

b) *(0,5 pt)* Montrer que : $e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$

Solution

$f(\alpha) = \alpha \iff \alpha + 1 - \ln(e^\alpha - \alpha) = \alpha \iff \ln(e^\alpha - \alpha) = 1 \iff e^\alpha - \alpha = e$.
De même, $f(\beta) = \beta$ donne $e^\beta - \beta = e$.
Donc $e^\alpha - \alpha = e^\beta - \beta$, c'est-à-dire $e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$.

5) Soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I =]-\infty, 1]$.

a) *(0,5 pt)* Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (il n'est pas demandé de déterminer $g^{-1}(x)$)

Solution

g est continue et strictement croissante sur $I =]-\infty, 1]$ (question 3) b)), donc g est une bijection de I vers

$$J = g(I) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] =]-\infty, 2 - \ln(e-1)].$$

Donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J =]-\infty, 2 - \ln(e-1)]$.

b) *(0,75 pt)* Vérifier que g^{-1} est dérivable en 1 et calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$.

Solution

On cherche $x \in I$ tel que $g(x) = 1$: $f(x) = 1 \iff \ln(e^x - x) = x \iff e^x - x = e^x \iff x = 0$, et $0 \in I$.
Donc $g(0) = 1$, c'est-à-dire $g^{-1}(1) = 0$ (et $1 \in J$ car $1 < 2 - \ln(e-1)$).
g est dérivable en 0 et $g'(0) = f'(0) = \dfrac{1-0}{e^0 - 0} = 1 \neq 0$.
Donc g^{-1} est dérivable en 1 et

$$\left(g^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(1)\right)} = \frac{1}{g'(0)} = 1.$$