

Examen national du baccalauréat — Session de rattrapage 2024

Sujet

Prof. El Koudri Hamza

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales (Sciences de la vie et de la terre et Sciences physiques) — option française Code RS 22F — Durée : 3 h — Coefficient : 7

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de trois exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 2	Nombres complexes	4 points
Exercice 3	Calcul des probabilités	2 points
Problème	Etude de fonctions numériques, calcul intégral et suites numériques	11 points

- On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module
- $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien

Exercice 1 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1, 1, 0)$ et $\Omega(-1, 1, -2)$ et le plan (P) d'équation $x + z - 1 = 0$

1) a) (0,5 pt) Vérifier que A est un point du plan (P) et donner un vecteur normal de (P) .
b) (0,5 pt) Montrer que la droite (ΩA) est perpendiculaire au plan (P) .

2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace vérifiant : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 4z - 3 = 0$
a) (0,5 pt) Montrer que (S) est une sphère de centre Ω et déterminer son rayon.
b) (0,5 pt) Montrer que (P) coupe (S) suivant un cercle de centre A puis déterminer son rayon.

3) Soit (Q_m) un plan d'équation $x + y + mz - 2 = 0$, où m est un nombre réel.
a) (0,25 pt) Vérifier que A est un point du plan (Q_m) , pour tout m de $\mathbb{R}$
b) (0,5 pt) Déterminer la valeur du réel m pour que (Q_m) soit perpendiculaire au plan (P)
c) (0,25 pt) Existe-t-il un plan (Q_m) qui coupe la sphère (S) suivant un cercle de centre A ? Justifier.

Exercice 2 : Nombres complexes (4 points)

I) On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - 4z + 9 = 0$

1) (0,25 pt) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (2i\sqrt{5})^2$
2) (0,5 pt) Résoudre l'équation (E)

II) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2 + i\sqrt{5}$, $b = 2 - i\sqrt{5}$ et $c = 2 - \sqrt{5}$.

1) a) (0,25 pt) Vérifier que $|a| = 3$
b) (0,25 pt) Montrer que le triangle OAB est isocèle.

2) a) (0,5 pt) Vérifier que $\frac{a - c}{b - c} = i$
b) (0,5 pt) Dédire la nature du triangle ABC

- 3) a) (0,5 pt) Déterminer l'abscisse du point D image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{CA}$
 b) (0,5 pt) Montrer que $ADBC$ est un carré.
 4) On pose $x_n = \left(\frac{a}{3}\right)^n$ et $y_n = \frac{1}{1-x_n}$, avec n un entier naturel non nul.
 a) (0,25 pt) Vérifier que $x_n \overline{x_n} = 1$
 b) (0,5 pt) Montrer que $y_n + \overline{y_n} = 1$ puis déduire la partie réelle de y_n

Exercice 3 : Calcul des probabilités (2 points)

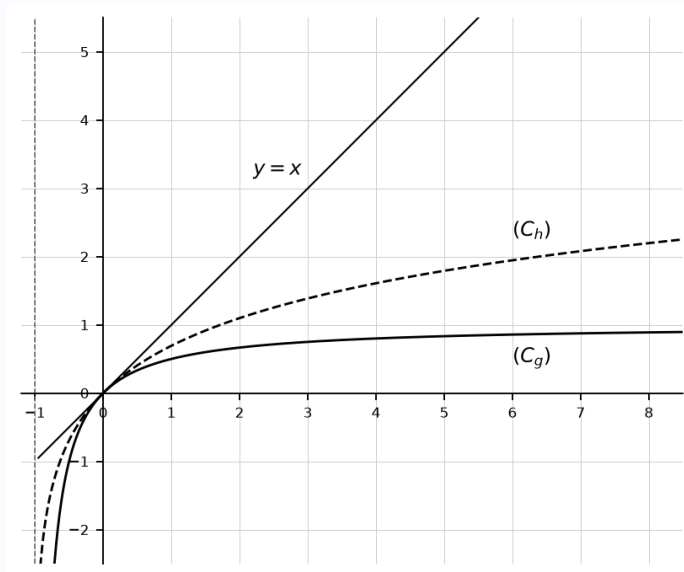
Une urne contient huit boules : quatre boules blanches, trois boules noires et une boule verte. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On tire au hasard successivement et sans remise trois boules de l'urne.

- 1) (0,25 pt) Vérifier que le nombre de tirages possibles est égal à 336
 2) (0,5 pt) Calculer la probabilité de l'événement A : « Tirer trois boules blanches ».
 3) (0,75 pt) Montrer que la probabilité de l'événement B : « Tirer trois boules de même couleur » est $p(B) = \frac{5}{56}$
 4) (0,5 pt) Calculer la probabilité de l'événement C : « Obtenir au moins deux couleurs différentes ».

Problème (11 points)

Partie I :

La figure ci-contre représente les courbes (C_g) et (C_h) des fonctions $g : x \mapsto \frac{x}{1+x}$ et $h : x \mapsto \ln(1+x)$ sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ et la droite d'équation $y = x$, dans un même repère orthonormé.



- 1) a) (0,5 pt) A partir de cette figure, justifier que : $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$, pour tout x de $] -1, +\infty[$
 b) (0,25 pt) En déduire que $(1+x) \ln(1+x) - x \geq 0$, pour tout x de $] -1, +\infty[$
 c) (0,5 pt) Prouver que $e^x - (1+e^x) \ln(1+e^x) \leq 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$
 2) Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = g(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
 a) (0,5 pt) Montrer par récurrence que $0 < u_n \leq 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$
 b) (0,5 pt) Montrer que la suite (u_n) est décroissante. (On peut utiliser la question 1) a))
 c) (0,25 pt) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 d) (0,75 pt) Déterminer la limite de (u_n) .

Partie II :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$.

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) (0,5 pt) Calculer $f(0)$ et vérifier que $f(x) > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
 b) (0,5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
 c) (0,5 pt) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

- 2) a)** (0,5 pt) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{1}{1+e^x} - e^{-x} \ln(1+e^x)$
- b)** (0,5 pt) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^x - (1+e^x) \ln(1+e^x)}{e^x(1+e^x)}$
- c)** (0,5 pt) Dédire que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ (On peut utiliser la question 1-c) de la partie I)
- 3) a)** (0,5 pt) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0
- b)** (0,25 pt) Vérifier que la tangente (T) passe par le point $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$
- c)** (0,75 pt) Construire (T) et la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prend $\ln 2 \approx 0,7$)
- 4) a)** (0,5 pt) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera. (Il n'est pas demandé de déterminer $f^{-1}(x)$)
- b)** (0,5 pt) Vérifier que f^{-1} est dérivable en $\ln 2$ et calculer $(f^{-1})'(\ln 2)$
- 5) Soit λ un réel strictement positif.**
- a)** (0,25 pt) Vérifier que $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, pour tout x de $\mathbb{R}$
- b)** (0,5 pt) Montrer que $\int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx = \ln(2) - \ln(1+e^{-\lambda})$
- c)** (0,5 pt) Montrer que $\int_0^\lambda f(x) dx = \ln(2) - f(\lambda) + \int_0^\lambda \frac{1}{1+e^x} dx$ (Remarquer que $f(x) = \frac{1}{1+e^x} - f'(x)$)
- d)** (0,5 pt) Dédire en fonction de λ , l'aire A_λ de la partie du plan délimitée par la courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$
- e)** (0,5 pt) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda$