

Examen national du baccalauréat

Session de rattrapage 2025

Mathématiques – 2BAC Sciences Expérimentales (option française)

Mathématiques — Filière : Sciences Expérimentales — Parcours : Sciences de la Vie et de la Terre et Sciences Physiques (option française) Code RS-22F

Instructions générales

- L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;
- Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;
- L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.

Composantes du sujet

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème, indépendants entre eux et répartis suivant les domaines comme suit :

	Domaine	Barème
Exercice 1	Suites numériques	3 points
Exercice 2	Géométrie dans l'espace	3 points
Exercice 3	Nombres complexes	3.5 points
Exercice 4	Calcul des probabilités	2.5 points
Problème	Etude de fonctions numériques et calcul intégral	8 points

Notations

- On désigne par $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe z et par $|z|$ son module.
- $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.
- e est le nombre réel tel que $\ln(e) = 1$.

Exercice 1 : Suites numériques (3 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{2 + u_n}$, pour tout entier naturel n

- 1) a) (0.25 pt) Vérifier que $u_{n+1} = 3 - \frac{4}{2 + u_n}$, pour tout entier naturel n
- b) (0.5 pt) Montrer par récurrence que $0 < u_n < 2$, pour tout entier naturel n
- 2) a) (0.25 pt) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 + u_n)(2 - u_n)}{2 + u_n}$, pour tout entier naturel n
- b) (0.5 pt) Montrer que la suite (u_n) est croissante et en déduire que (u_n) est convergente.
- c) (0.5 pt) Montrer que $0 < 2 - u_{n+1} \leq \frac{2}{7}(2 - u_n)$, pour tout entier naturel n
- d) (0.5 pt) Déduire que $0 < 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^n$, pour tout entier naturel n
- e) (0.5 pt) Déterminer la limite de la suite (u_n)

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 3, 3)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 3, 1)$ et le vecteur $\vec{n}(1, -1, 1)$. Soit (P) le plan d'équation $x - y + z - 6 = 0$

- 1) a) (0.5 pt) Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{n}$ et déduire que les points A , B et C sont non alignés.
- b) (0.25 pt) Montrer que les plans (ABC) et (P) sont parallèles.
- 2) Soit (S) la sphère telle que : le plan (ABC) est tangent à (S) en A et le plan (P) est tangent à (S) en un point H
 - a) (0.5 pt) Calculer la distance du point A au plan (P) et déduire que le rayon de la sphère (S) est $\sqrt{3}$
 - b) (0.25 pt) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale au plan (P)
 - c) (0.5 pt) Montrer que les coordonnées du point H sont $(2, 1, 5)$.
 - d) (0.5 pt) Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 8z + 18 = 0$ est une équation cartésienne de la sphère (S)
- 3) (0.5 pt) Déterminer les deux points d'intersection de la droite (BH) et la sphère (S)

Exercice 3 : Nombres complexes (3.5 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B , C et D d'affixes respectives : $a = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$, $b = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, $c = 1 + a$ et $d = \bar{c}$

- 1) (0.5 pt) Vérifier que $|a| = 1$ et que $\arg(a) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$
- 2) (0.75 pt) Vérifier que $\frac{c - d}{c - a} = i$ et déduire que le triangle ACD est isocèle rectangle en C
- 3) a) (0.5 pt) Montrer que $d - a = 1 - i$ et que $b - d = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}(1 - i)$
- b) (0.25 pt) Déduire que les points A , D et B sont alignés.
- 4) Soit R la transformation du plan qui transforme chaque point M d'affixe z en M' d'affixe z' tel que $z' = az$.
 - a) (0.5 pt) Vérifier que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
 - b) (0.5 pt) Vérifier que $ad = c$ et déduire que $R(D) = C$
 - c) (0.5 pt) Montrer que $\arg(c) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$

Exercice 4 : Calcul des probabilités (2.5 points)

Un sac contient 4 boules blanches et 3 boules noires. (Les boules sont indiscernables au toucher).

Un jeu consiste à tirer successivement et sans remise deux boules du sac.

Les règles du jeu sont comme suit :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on note : +5.
- Si les deux boules tirées sont noires, on note : -5.
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, on note : 0.

On considère les événements : G « noter +5 » ; Z « noter 0 »

N_1 « La première boule tirée est noire » ; B_2 « la deuxième boule tirée est blanche »

- 1) a) (0.5 pt) Calculer $p(G)$, la probabilité de l'évènement G
- b) (0.5 pt) Montrer que la probabilité de l'évènement Z est $p(Z) = \frac{4}{7}$
- 2) a) (0.5 pt) Calculer la probabilité $p(N_1 \cap B_2)$
- b) (0.5 pt) Montrer que $p(B_2) = \frac{4}{7}$
- c) (0.5 pt) Déduire la probabilité de « noter 0 » sachant que la deuxième boule tirée est blanche.

Problème (8 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 2}$

Soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) (0.5 pt) Calculer $f(0)$ et $f(\ln 2)$

2) a) (0.5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) (0.5 pt) Vérifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = 0$ puis interpréter géométriquement ce résultat.

3) a) (0.25 pt) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 2}$

b) (0.5 pt) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 2}$ puis déduire que la droite d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$

c) (0.5 pt) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 < f(x) - x < 1$

4) a) (0.5 pt) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{e^{2x} + 4}{(e^x + 2)^2}$

b) (0.25 pt) Déduire que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5) a) (0.5 pt) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$

b) (0.5 pt) Soit α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$

Vérifier que $-1 < \alpha < 0$ et montrer que $e^\alpha = \frac{2(1 + \alpha)}{1 - \alpha}$

6) a) (0.5 pt) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = \frac{4e^x(e^x - 2)}{(e^x + 2)^3}$

b) (0.25 pt) Etudier le signe de $e^x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

c) (0.5 pt) Déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion que l'on déterminera.

d) (0.5 pt) Montrer que $y = \frac{1}{2}x + \frac{\ln 2}{2}$ est l'équation de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $\ln 2$

7) (0.75 pt) Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

8) a) (0.5 pt) Montrer que $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 2} dx = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right)$

b) (0.5 pt) Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, la droite d'équation $y = x - 1$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 2$